

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ МАСИВНИХ І ТОНКОСТІННИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ

Іван МАРТИНЮК

Київський національний університет будівництва і архітектури  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037  
ivan.martinyuk@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

**Анотація.** Викладені результати чисельного дослідження на тестових прикладах збіжності розробленого варіанту напіваналітичного методу скінчених елементів. Виконано порівняння витрат машинного часу і точності розв'язання пружних і пластичних задач, отриманих на основі скінчених елементів зі змінними і усередненими механічними параметрами.

Досліджено збіжність методу скінчених елементів і напіваналітичного методу скінчених елементів при розрахунку призматичних тіл, навантажених локалізованими і розподіленими зовнішніми впливами. В розробці на основі моментної схеми скінчених елементів і напіваналітичного варіанту методу скінчених елементів ефективного чисельного підходу до дослідження довільно навантажених масивних і тонкостінних призматичних тіл складної форми, деформування яких може проходити за межею пружності матеріалу. За рахунок подання переміщень поліномами і використання ітераційних методів розв'язання систем дозволяють рівнянь даний підхід розвинений стосовно розрахунку об'єктів з довільними граничними умовами на торцях, що дозволило розширити область ефективного застосування напіваналітичного методу скінчених елементів на новий клас задач.

Розв'язано ряд нових складних завдань пружного і пружно-пластичного деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл, що мають самостійне прикладне значення.



**Іван МАРТИНЮК**  
докторант кафедри будівельної  
механіки,  
к.т.н.

**Ключові слова.** Метод скінчених елементів (МСЕ); напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ); пружне та пружно-пластичне деформування; масивні і тонкостінні призматичні тіла; розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь; метод блочних ітерацій.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Найбільш трудомістким етапом дослідження в пружною і пружно-пластичної постановках конструкцій методом скінчених елементів є розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь. Огляд літератури, класифікація і зіставлення методів розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ міститься в роботах [1-8, 11, 12, 14].

Їх аналіз свідчить про те, що найбільш ефективними є комбіновані алгоритми, засновані на поєднанні крокових і інтернаціональних методів [10]. У даній роботі на одному кроці по навантаженню розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь здійснюється методом блокових ітерацій з верхньої релаксацією, застосування якого до матриць блокової структури, характерної для НМСЕ, є найбільш природним.

## ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ ІЗ ЗМІННИМИ ФІЗИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянемо просторове тіло, що утворене рухом деякої геометричної фігури складної, не обов'язково однозв'язної конфігурації, вздовж незамкненої напрямної у вигляді дуги кола (рис.1.1,а) або відрізка прямої (рис.1.1, б). Фізико-механічні характеристики матеріалу (зокрема модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E$ ) також передбачаються залежними від просторових координат. Таке змінення може носити локальний характер із змінням величин на декілька порядків (як показано на рис.1.1,а, зокрема внаслідок наявності набутих в процесі експлуатації макроскопічних дефектів), або поступовим і описуватись певною функцією розподілу вздовж просторових координат  $E = E(z^i)$  (як це показано на рис.1.1б, що обумовлюється відхиленням значень фізико-механічних характеристик від номінальних). Такі зміни фізико-механічних характеристик призводять до різних за кількісними оцінками змін показників напружено-деформованого стану, а у випадку концентрації напружень – навіть до змін в якісній картині їх розподілення. На торцях тіла можуть бути реалізовані різні типи граничних умов. У подальшому такі об'єкти будемо називати неоднорідними круговими (рис.1.1,а) та неоднорідними призматичними (рис.1.1,б) тілами із змінними фізичними параметрами і довільними граничними умовами.

Отримання розв'язуваних співвідношень НМСЕ ґрунтується на варіаційному рівнянні Лагранжа:

$$\delta W - \delta A = 0. \quad (1)$$

У випадку пружного деформування варіація енергії просторового деформівного тіла об'ємом  $V$  визначається співвідношенням:

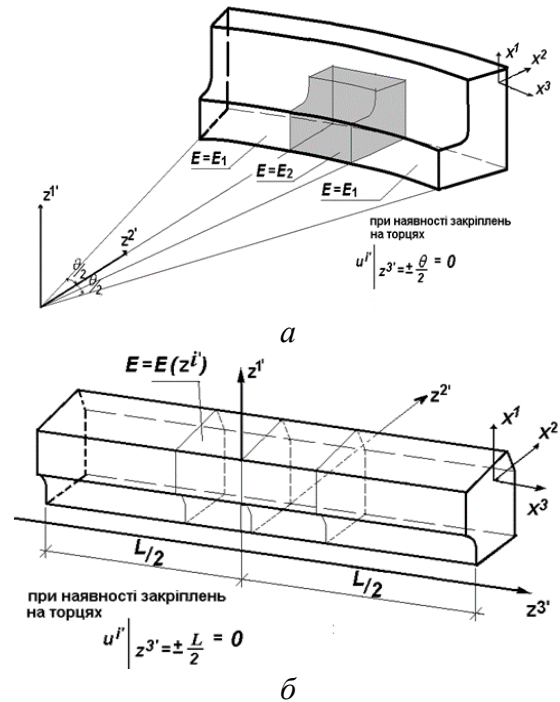
$$\delta W = \iiint_V \varepsilon_{kl} C^{ijkl} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{ij}$  і  $C^{ijkl}$  – тензори деформацій і пружних констант.

Варіація роботи об'ємних сил  $p^j$  та поверхневих навантажень  $q^j$ , розподілених вздовж частини поверхні тіла  $S_q$ , обчислюється за формулою:

$$\delta A = \iiint_V p^j \delta U_j d + \iint_{S_q} q^j \delta \bar{U}_j dS \quad (3)$$

де  $U_j$  і  $\bar{U}_j$  – відповідно переміщення точок об'єму тіла і частини його поверхні  $S_q$ , завантаженої зовнішніми навантаженнями [21].



**Рис. 1.** Розрахункова схема конструкції утвореної рухом складної геометричної фігури: а- частина дуги кола; б- прямий відрізок.

**Fig. 1.** Calculation diagram of the construction of a complex geometric figure formed by movement: а- part of the arc of a circle; б- straight segment

Для дослідження процесів деформування зазначених тривимірних тіл доцільно використовувати такі системи координат: *базисну*  $z^{j'}$  (в розглядуваних випадках: циліндричну – для неоднорідних кругових тіл або декартову – для неоднорідних призматичних тіл), яка є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (осі  $z^{1'}$  та  $z^{2'}$  базисної системи координат розташовані в площині поперечного перерізу тіла, а вісь  $z^{3'}$  орієнтована вздовж напрямної); *місцеву* криволінійну систему координат  $x^i$ , природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому напрямки осей  $x^3$  і  $z^{3'}$  збігаються.

Вважаємо, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення  $z_{j'}^{i'}$ , що означає зв'язок між місцевою та базисною системами координат [21]:

$$z_{j'}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{3'}^{\alpha} = z_{\alpha}^{3'} = 0 \quad (4)$$

Умовні позначення, що вказані тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'} \quad (5)$$

При дослідженні незамкнених кругових тіл для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2 (z^{2'})^2 \quad (6)$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2 \quad (7)$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій  $\varepsilon_{ij}$  через переміщення  $u_i$  в місцевій системі координат [21]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k \quad (8)$$

де  $\Gamma_{ij}^k$  – символи Крістофеля другого роду.

Представимо переміщення та символи Крістофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'} z_{,k}^{s'}$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{,l'}^k z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{,l'}^k z_{,i}^{m'} \frac{\partial z_{,j}^{l'}}{\partial z^{m'}}$$

де  $x_{,l'}^k$  – компоненти тензора, оберненого до виразу (4).

Після підстановки двох останніх формул в (8), зважаючи, що  $z_{,k}^{s'} \cdot x_{,l'}^k = \delta_{l'}^{s'}$ , одержимо загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{l',i} z_{,j}^{l'} + u_{l',j} z_{,i}^{l'} \right) - u_{l'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} \quad (9)$$

У циліндричній базисній системі координат не дорівнюють нулю тільки такі символи Крістофеля:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}$$

Тоді з формули (9) одержимо:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( u_{\gamma',\alpha} z_{\beta}^{\gamma'} + u_{\delta',\beta} z_{\alpha}^{\delta'} \right)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( u_{3',\alpha} z_{3'}^{\alpha} + u_{\gamma',3} z_{\alpha}^{\gamma'} \right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3',3} z_{3'}^{\alpha} + u_{2',3} z_{3'}^{\alpha} z_{3'}^{\alpha}$$

У декартовій базисній системі координат дорівнюють нулю всі символи Крістофеля, тому формула (8) матиме вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{l,i} z_{j}^{l'} + u_{l,j} z_{i}^{l'} \right) \quad (11)$$

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$  та пружних констант  $\tilde{C}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}} \quad (12)$$

$$\tilde{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}$$

При їх використанні для варіації енергії пружного деформування отримаємо:

$$\delta W = \iiint_V \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \quad (13)$$

При описі процесу деформування передбачається, що пружні деформації є малими. Напруження  $\sigma^{ij}$  визначаються через компоненти тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука [21]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = \left[ \begin{array}{c} \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \\ + \lambda g^{ij} g^{kl} \end{array} \right] \varepsilon_{kl}^e \quad (14)$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^{i'}, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^{i'}, T)$ , які є функціями температури і координат:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Фізичні компоненти тензору напружень дорівнюють:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}} \quad (15)$$

Варіаційне рівняння в термінах фізичних компонент тензорів деформацій (15) дозволяє проводити опис пружного деформування просторових тіл складної конфігурації.

## ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ

У випадку розв'язання задачі пружнопластичності варіація енергії деформування просторового деформівного тіла об'ємом  $V$  в варіаційному рівнянні Лагранжа (16) визначається співвідношенням:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (16)$$

При наявності незворотних деформацій пластичності зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння [13-15, 17-19, 22 та інші]. В цьому випадку приращення повних деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  може бути подане сумою приращень пружних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^e$ , приращень деформацій пластичності  $d\varepsilon_{ij}^p$ :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (17)$$

При використанні співвідношень теорії пластичного течіння вважається, що матеріал є пластично-нестікуваним і змінення його об'єму є лінійно-пружним:

$$\varepsilon_{i(i)}^p = 0 \quad \varepsilon_{i(i)} = \varepsilon_{i(i)}^e$$

Приращення деформацій пластичності визначається згідно з асоційованим законом:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij} \quad (18)$$

де  $f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p, T)]^2 = 0$  – поверхня текучості, що обмежує область пружних деформацій;

$\tau_s(\vartheta_p, T)$  – межа текучості при чистому зсуві;

$\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ijp}}$  – параметр зміцнення Одквіста;

$s_{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma^{kl} g^{ij}$  – компоненти діватора напружень;

$\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Виконуючи диференціювання виразу (18), встановлюємо взаємозв'язок між прирощеннями напружень і прирощеннями пружних деформацій, який враховує залежність фізико-механічних властивостей матеріалу від температури:

$$\begin{aligned} d\sigma^{ij} = & [\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) \\ & + \lambda g^{ij} g^{kl}] \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow} \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow} \\ & \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow} d\varepsilon_{kl}^e + \\ & + \frac{\partial}{\partial T} [\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) \\ & + \lambda g^{ij} g^{kl}] dT \varepsilon_{kl}^e \end{aligned} \quad (19)$$

де, згідно з формулою (17),  $d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p$ .

Для визначення прирощень деформацій пластичності скористуємося співвідношеннями (19). Оскільки при пластичному деформуванні зображувальна точка залишається на поверхні текучості, то виконується рівність:

$$\begin{aligned} d f_p = & \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p \\ & + \frac{\partial f_p}{\partial T} dT = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Часткові похідні в рівнянні (20) по  $s^{ij}$ ,  $\vartheta_p$ ,  $T$  дорівнюють:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} &= s^{ij}, \\ \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} &= 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p}, \\ \frac{\partial f_p}{\partial T} &= 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial T} \end{aligned} \quad (21)$$

З урахуванням цього і тотожності  $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$  вираз (21) набуде вигляду:

$$s_{ij} d\sigma^{ij} - 2\tau_s \left( \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right) = 0 \quad (22)$$

Враховуючи співвідношення (19) і (21), рівняння (22) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{ij} [\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}] \times \\ \left( d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p - \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} dT \cdot T g_{kl} \right) + \\ + s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) \right. \\ \left. + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \cdot \varepsilon_{kl}^e = \\ = 2\tau_s \left( \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right). \end{aligned}$$

Подамо прирощення пластичних деформацій відповідно до формули (21). Після відповідних перетворень запишемо вираз  $\lambda_p$  для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2 G \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow} \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow} s^{kl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T) + \beta_p dT}{\gamma_p}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \beta_p &= s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} [\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) \\ & + \lambda g^{ij} g^{kl}] \varepsilon_{kl}^e \\ & - 2G s^{kl} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} dT \cdot T g_{kl} \\ \gamma_p &= 2 G s^{kl} s_{kl} + \frac{4}{3} \sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} = \\ & = 4\tau_s^2 \left( G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right). \end{aligned}$$

Після підставлення значення  $d\varepsilon_{kl}^p$  через знайдене  $\lambda^p$  в рівняння (19) отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[ \begin{aligned} &\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) \\ &+ \lambda g^{ij}g^{kl} \end{aligned} \right] - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \frac{1}{\gamma^p} \right\} \times \\ \times (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T) \times \\ \times \frac{\beta_p}{\gamma_p} s^{kl} - 2Gs^{kl} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} dT \cdot T g_{kl} - \\ - \frac{\partial}{\partial T} [\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] \varepsilon_{kl}^e \} dT. \quad (23)$$

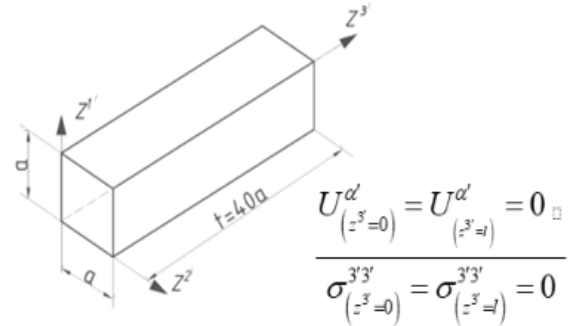
Перший зі складників отриманого виразу являє собою приращення напружень, що визначаються з урахуванням залежності фізико-механічних параметрів від розвитку деформацій пластичності, а другий (відокремлений фігурними дужками) визначає приращення напружень, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик при змінній температурі.

Таким чином, наведені фізичні спів-відношення дозволяють проводити опис термопружнопластичного деформування просторових тіл в тому числі при наявності нерівномірно розподілених за просторовими координатами температур в об'ємі досліджуваного об'єкта.

### ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ БАЛКИ

Розроблений пакет програм орієнтований на розрахунок конструкцій в пружній та пружно-пластичній області деформацій. Апробація можливостей пакета при дослідженні розвитку пластичних деформацій в тонкостінних конструкціях проведена на прикладі шарнірно закріпленої балки довжиною  $t=40a$ , де  $a$  - розмір сторони квадратного поперечного перерізу, що наведено на рис.4.1. Балка деформується під дією рівномірно розподіленого по верхній площині навантаження і виконана

із ідеального матеріалу з характеристиками: модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0$ , межа плинності при чистому зсуві  $\sqrt{3}\tau_3 = 9,5$  МПа. Розв'язання задачі отримано при п'яти гауссових точках інтегрування по висоті елемента. на рис. 2.



**Рис. 2.** Розрахункова схема конструкції  
**Fig. 2.** Calculation diagram of the structure

Відповідно до точного розв'язання задачі, наведеному в роботі [13], межі зон пластичної деформації описуються формулою:

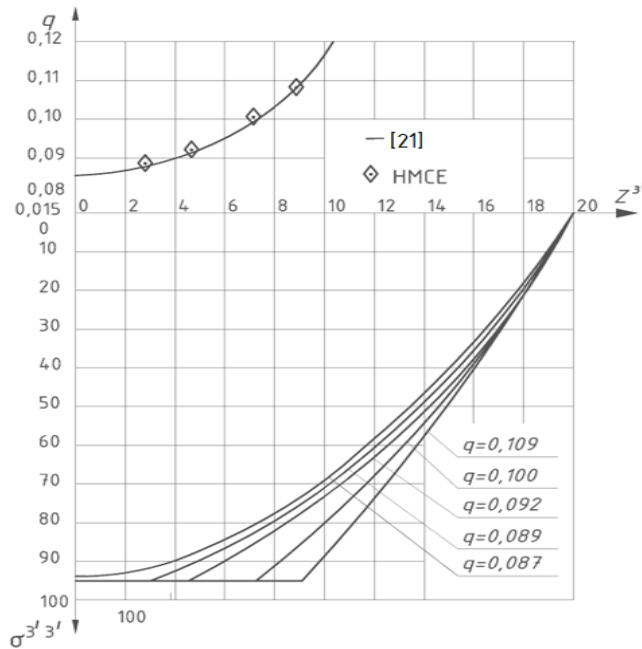
$$(2z^{1'} - a)^2 - 3a^2 = \\ = 2a^2 \frac{q}{q_0} \left[ \frac{(2z^3 - t)^2}{t^2} - 1 \right] \quad (24)$$

У формулі  $q_0$  - значення інтенсивності розподіленого навантаження при котрому виникають пластичні деформації:

$$q_0 = \frac{16M}{3t^2} \quad (25)$$

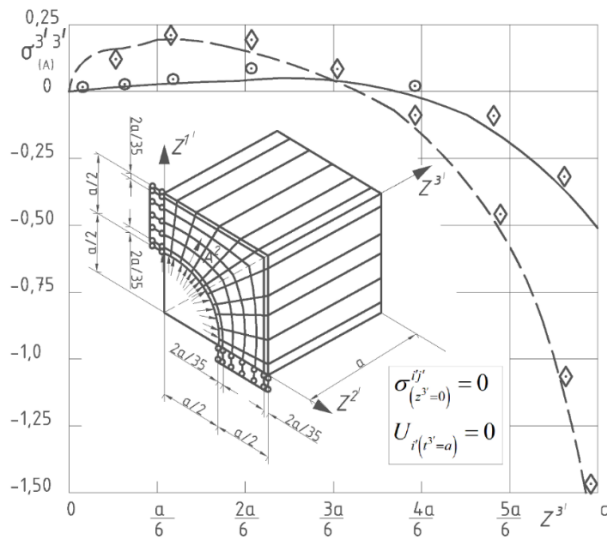
де  $M$ - граничне значення згинального моменту.

На рис. 3 наведений графік, що відображає розвиток зони пластичних деформацій по довжині балки при збільшенні інтенсивності зовнішнього навантаження. Суцільною лінією позначена крива, отримана за допомогою співвідношення (24), ромбиками позначені результати розв'язання даної задачі на основі НМСЕ. У всьому діапазоні зміни інтенсивності навантаження  $q$  похибка чисельного розв'язання не перевищує 1%.



**Рис. 3.**Графік розвитку зони пластичних де-  
формацій

**Fig. 3.** The graph of the development of the  
zone of plastic deformations



**Рис. 4.** Розрахункова схема конструкції  
**Fig. 4.** Calculation diagram of the structure

Там же наведені графіки, що ілюструють зміну розподіленого напруження  $\sigma^{3'3'}$  по довжині балки в найближчій до поверхні точці інтегрування при збільшенні зовнішнього навантаження. Виникнення пластичних деформацій в балці відбувається при значенні нормальних навантажень

$\sigma = 9,5$  МПа, що відповідає граничній інтенсивності зовнішнього навантаження  $q_0 = 0,875$  МПа.

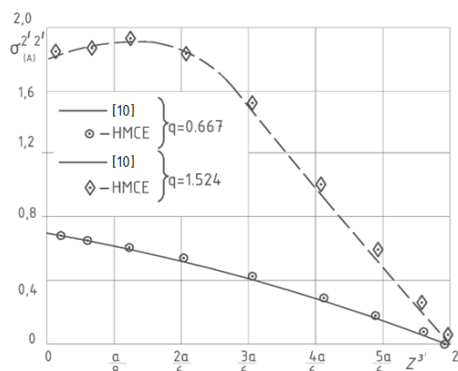
### ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ В КОНСОЛЬНОМУ ПРИЗМАТИЧНОМУ БРУСІ СКЛАДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Аналіз можливостей методики при вирішенні фізично нелінійних задач для масивних

об'єктів з довільними кінематичними умовами проведено на прикладі призматичного бруса з круглими отворами під дією внутрішнього тиску. Розрахункова схема конструкції наведена на рис. 3. Інтенсивність внутрішнього тиску змінювалася в межах  $q = 0,667\tau_s - 1,524\tau_s$ , де  $\tau_s$  - межа текучості матеріалу при чистому зсуві. Кінематичні граничні умови задачі формуються наступним чином: торець  $z^3 = 0$  - вільний, торець  $z^3 = \alpha$  - жорстко закріплений. Матеріал ідеально пластичний.

Розв'язання задачі отримано по розробленій методиці на основі НМСЕ і за допомогою скінчено елементної дискретизації у трьох напрямках [9]. При цьому число членів розкладання відповідало кількості СЕ вздовж осі  $z^3$ .

Результати приведені у вигляді епюр відносних напружень  $\bar{\sigma}_{(A)}^{3'3'} = \frac{\sigma^{3'3'}}{\tau_s}$  (рис. 2) і  $\bar{\sigma}_{(A)}^{2'2'} = \frac{\sigma^{2'2'}}{\tau_s}$  (рис. 5), побудованих вздовж лінії, що проходить через точку А паралельно осі  $z^3$ .



**Рис. 5.** Результати епюр відносних напружень  
**Fig. 5.** Results of relative stress plots

Суцільними лініями зображені криві, що відображають скінчено елементні розв'язання при інтенсивності зовнішнього навантаження  $q = 0,667\tau_s$  штрихові – теж саме при  $q = 1,524\tau_s$ . Ромбиками позначені напруження обчисленні НМСЕ при  $q = 0,667\tau_s$ , кружечками -  $q = 1,524\tau_s$ .

Спостерігається повна збіжність результатів, отриманих різними методами.

## ВИСНОВКИ

Таким чином, розроблена методика дозволяє з високою точністю визначати напружений стан тонкостінних конструкцій в пружно-пластичній області деформації.

Виконані розв'язання контрольних задач показали, що розроблена методика і той що реалізує її програмний комплекс забезпечують отримання достатніх результатів при розрахунку в пружній та пружно-пластичній по-становках масивних і тонкостінних призматичних тілах з довільними граничними умовами на торцях.

1. **Баженов В.А., Вабіщевіч М.О., Пискунов С.О., Солодей І.І.** Чисельні дослідження нелінійного деформування просторових тіл з урахуванням розвитку тріщин при статичних та динамічних навантаженнях – *К.: Каравела, 2020.* – 200 с.
2. **Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.** Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл. – *Київ, 2012.* – 247 с.
3. **Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В.** Напіваналітичний метод скінчених елементів у просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної форми – *К.: Каравела, 2021.* – 280 с.
4. **Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.** Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування тіл з урахуванням великих пластичних деформацій. – *Київ: Каравела, 2019.* – 240 с.
5. **Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.** Метод скінчених елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні. – *К.: Каравела, 2018.* – 316 с.
6. **Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.** Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування



- просторових тіл: Монографія – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
7. **Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.** Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія – К. : «Каравела», 2014. – 236 с.
  8. **Баженів В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.** Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури – К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
  9. **Блох В. І.** Теорія пружності - Х.: Вид. Харків. Держ. Університету, 1964. - 484 с.
  10. **Братко О.В.** Застосування МСЕ до розв'язання просторових завдань термо-пластичності. - *Опір матеріалів та теорія споруд*, 1984, вип.44, с.33-36.
  11. **Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І.** Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружнопластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2007. – Вип. 79. – С. 18–42.
  12. **Максим'юк Ю., Гончаренко М., Мартинюк І, Максим'юк О.** Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл - *Будівельні конс-трукції теорія і практика*. – 2020. – Вип. 7. – С. 101–108.
  13. **Максим'юк Ю., Козак А., Максим'юк О.** Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування - *Будівельні конструкції теорія і практика* – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20.
  14. **Максим'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.** Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл - *Опір матеріалів і теорія споруд* – 2019. – Вип. 102. – С. 252–262.
  15. **Максим'юк Ю.В.** Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і критичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл - *Опір матеріалів і теорія споруд* – 2016. – Вип. 97. – С. 186–193
  16. **Маркол (P.V. Marcal).** Сравнительное исследование численных методов упруго-пластического расчета. – *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, № 1, с.188-189.
  17. **Можаровський М. С.** Додаток методів теорії пластичності та повзучості до вирішення інженерних завдань машинобудування: У 2 ч. - К.: Вища шк., 1991 - Ч. I. *Теорія пластичності та повзучості в інженерній справі: [підручник]*. - 1991. - 264 с.
  18. **Можаровський М. С.** Додаток методів теорії пластичності та повзучості до вирішення інженерних завдань машинобудування: У 2 ч. - К.: Вища шк., 1991 - Ч. II. *Методи та алгоритми вирішення крайових завдань: [навчальний посібник]* / М. С. Можаровський, М.С. Качалівська. - 1991. - 287 с.
  19. **Пискунов С. О.** Дослідження деформацій повзучості з урахуванням пластичних властивостей матеріалу - *Опір матеріалів і теорія споруд*. - 2002. – Вип. 71. – С. 73-79.
  20. **Сахаров А.С.** та ін. Метод скінчених елементів у механіці твердих тіл. - К.: Вища школа, Голов. Вид-во; Лейпциг: ФЕБ. Фахбухдерлог, 1982. - 479 с.
  21. **Соколовский В.В.** Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 390 с.
  22. **Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Maksimyuk Y.V., Shkryl' A.A.** A modified method for evaluating the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies - *International Applied Mechanics*. – 2016. – 52(2). pp. 140-146. DOI: [10.32347/2522-4182.7.2020.101-108](https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.101-108).
  23. **Mondkar D.P., Powell G.H.** Finite element analysis of non-linear static and dynamic. Response. – *Int. T. Num. Meth. Sn Eng.*, v.11, 1977, № 3, p.499-520.
  24. **Максим'юк Ю., Козак О, Мартинюк І, Бучко В.** (2022) Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах // *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (10), 150–157. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.10.2022.150-157>
  25. **Мартинюк, І** (2022). Реалізація програмного забезпечення розрахунку міцності на основі напіваналітичного методу скінчених елементів. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (11), 61–68. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.11.2022.61-68>

26. Максим'юк, Ю. ., Шкриль, О. ., Мартинюк, І. ., & Бучко, В. . (2021). Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами. //Будівельні конструкції. Теорія і практика, (9), 54–62.

<https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.54-62>

## REFERENCES

1. **Bazhenov V.A., Vabishchevych M.O., Pyskunov S.O., Solodei I.I.** Chyselni doslidzhennia neliniinoho deformuvannia prostoro vykh til z urakhuvanniam rozvytku trishchyn pry statychnykh ta dynamichnykh navantazhenniakh – K.: Karavela, 2020. – 200 c.
2. **Bazhenov V.A., Huliar O.I., Sakharov O.S., Solodei I.I.** Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh dynamiky prostoro vykh til. – Kyiv, 2012. – 247 s.
3. **Bazhenov V.A., Maksymiuk Yu.V Martyniuk I.I., Maksymiuk O.V.** Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv u prostoro vykh zadachakh deformuvannia, ruinuвання ta formozminennia til skladnoi formy – K.: Karavela, 2021. - 280 s.
4. **Bazhenov V.A., Maksymiuk Yu.V., Solodei I.I., Stryhun R.L.** Chyselne modeliuвання protsesiv neliniinoho deformuvannia til z urakhuvanniam velykykh plastychnykh defor-matsii. – Kyiv: Karavela, 2019. – 240 s.
5. **Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Maksymiuk Yu.V.** Metod skinchenykh elementiv u zadachakh deformuvannia ta ruinuвання til obertannia pry termosylovomu navantazhenni. – K.: Karavela, 2018. – 316 s.
6. **Bazhenov V. A., Huliar O.I., Pyskunov S.O. , Sakharov O.S.** Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh ruinuвання prostoro vykh til: Monohrafiia – K. : KNUBA, 2005. – 298 s.
7. **Huliar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.** Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh kontynualnogo ruinuвання prostoro vykh til: Monohrafiia – K. : «Karavela», 2014. – 236 s.
8. **Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.** Neliniine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury – K. : ZAT «Vipol», 2010. – 315 s.
9. **Blokh V. I.** Teoriia pruzhnosti - Kh.: Vyd. Kharkiv. Derzh. Universytetu, 1964. - 484 s.
10. **Bratko O.V.** Zastosuvannia MSE do rozv'iazannia prostoro vykh zavdan termoplastychnosti. - *Opir materialiv ta teoriia sporud*, 1984, vyp.44, s.33-36.
11. **Huliar O.I., Pyskunov S.O., Maksymiuk Yu.V., Syzevych B.I.** Rozrakhunkovi spivvidnoshennia MSSE heometrychno neliniinoi zadachi temoviazkopruzhnoplastychnoho defor-muvannia visesymetrychnykh til z urakhuvan-niam poshkodzhenosti materialu. - *Opir materialiv i teoriia sporud*. – 2007. – Vyp. 79. – S. 18–42.
12. **Maksymiuk Yu., Honcharenko M., Martyniuk I, Maksymiuk O.** Alhorytm rozv'iazannia systemy liniinykh ta neliniinykh rivnian napivanalitichnym metodom skinchenykh elementiv dlia kryvoliniinykh neodnorodnykh pryzmatychnykh til - *Budivelni kons-truktsii teoriia i praktyka*. – 2020. – Vyp. 7. – S. 101–108.
13. **Maksymiuk Yu., Kozak A., Maksymiuk O.** Rozv'iazuvalni spivvidnoshennia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv v zadachakh termoviazkopruzhnoplastychnoho deformuvannia - *Budivelni konstruksii teoriia i praktyka* – 2019. – Vyp. 4. – S. 10–20.
14. **Maksymiuk Yu.V., Solodei I.I., Stryhun R.L.** Vykhidni spivvidnoshennia neliniinoho dynamichnogo formozminennia visesymetrychnykh ta ploskodeformivnykh til - *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2019. – Vyp. 102. – S. 252–262.
15. **Maksymiuk Yu.V.** Postanovka zadachi pro vplyv heometrychnoi neliniinosti na nesuchu zdatnist i zakrytychnu povedinku tonkostinnykh ta kombinovanykh visesymetrychnykh til - *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2016. – Vyp. 97. – S. 186–193.
16. **Markol (P.V. Marcal).** Sravnytelnoe yssledovanye chyslennykh metodov upruhoplastycheskoho rascheta. – *Raketaia tekhnika y kosmonavtyka*, 1968, № 1, s.188-189.
17. **Mozharovskiy M. S.** Dodatok metodiv teorii plastychnosti ta povzuchosti do vyrishennia inzhenernykh zavdan mashynobuduвання: U 2 ch. - K.: Vyshcha shk., 1991 -. Ch. I. Teoriia plastychnosti ta povzuchosti v inzhenernii spravi: [pidruchnyk]. - 1991. - 264 s.

<https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.54-62>

## SOLUTION OF PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF DEFORMATION OF MASSIVE AND THIN-WALLED PRISMATIC BODIES

Ivan MARTYNIUK

**Abstract.** The results of a numerical study on test examples of the convergence of the developed version of the semi-analytical method of finite elements are presented. A comparison of machine time and accuracy of solving elastic and plastic problems obtained on the basis of finite elements with variable and averaged mechanical parameters was performed. The convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method in the calculation of prismatic bodies loaded with localized and distributed external influences was studied. An effective numerical approach to the study of arbitrarily loaded massive and thin-walled prismatic bodies of complex shape, the deformation of which can pass beyond the elastic limit of the material, is being developed based on the finite element moment scheme and the semi-analytical variant of the finite element method. Due to the representation of displacements by polynomials and the use of iterative methods of solving systems of equations, this approach is developed in relation to the calculation of objects with arbitrary boundary conditions on the ends, which made it possible to expand the area of effective application of the semi-analytical method of finite elements to a new class of problems.

A number of new complex problems of elastic and elastic-plastic deformation of massive and thin-walled prismatic bodies, which have an independent applied value, have been solved.

**Keywords.** Finite element method (FEM); semi-analytical finite element method (SFEM); elastic and elastic plastic deformation; massive and thin-walled prismatic bodies; solution of systems of linear and nonlinear equations; method of block iterations.

18. **Mozharovskyi M. S.** Dodatok metodiv teorii plastychnosti ta povzuchosti do vyrishennia inzhenernykh zavdan mashynobuduvannia: U 2 ch. - K.: Vyshcha shk., 1991 - Ch. II. Metody ta alhorytmy vyrishennia kraiovykh zavdan: [navchalnyi posibnyk]/M. S. Mozharovskyi, M.Ie. Kachalivska. - 1991. - 287 s.
19. **Pyskunov S. O.** Doslidzhennia deformatsii povzuchosti z urakhuvanniam plastychnykh vlastyvopei materialu - *Opir materialiv i teoriia sporud.* 2002. – Vyp. 71. – S. 73-79.
20. **Sakharov A.S. ta in.** Metod skinchenykh elementiv u mekhanitsi tverdykh til. - K.: Vyshcha shkola, Holov. Vyd-vo; Leiptsyh: FEB. Fakhbukhderloh, 1982. - 479 s.
21. **Sokolovskyi V.V.** Teoriia plastychnosti. – M.: Vysshaia shkola, 1969. – 390 s.
22. **Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Maksimyuk Y.V., Shkryl A.A.** A modified method for evaluating the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies - *International Applied Mechanics.* – 2016. – 52(2). pp. 140-146. DOI: 10.32347/2522-4182.7.2020.101-108.
23. **Mondkar D.P., Powell G.H.** Finite element analysis of non-linear static and dynamic. Response. – *Int. T. Num. Meth. Sn Eng., v.11, 1977, № 3, p.499-520.*
24. **Maksymiuk Yu., Kozak O, Martyniuk I, Buchko V.** (2022) Systemy koordynatnykh funktsii pid chas rozkladannia peremishchen po polinomakh // *Budivelni konstruksii. Teoriia i praktyka, (10), 150–157.*  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.10.2022.150-157>
25. **Martyniuk, I** (2022). Realizatsiia prohram-noho zabezpechennia rozrakhunku mitsnosti na osnovi napivanalitichnoho metodu skinchenykh elementiv. *Budivelni konstruksii. Teoriia i praktyka, (11), 61–68.*  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.11.2022.61-68>
26. **Maksymiuk, Yu. ., Shkryl, O. ., Martyniuk, I. & Buchko, V.** (2021). Vuzlovi reaktsii ta koefitsiienty matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa na osnovi predstav-lennia peremishchen polinomamy. // *Budivelni konstruksii. Teoriia i praktyka, (9), 54–62.*

*Стаття надійшла до редакції 11.11.2023*