

## ОПТИМАЛЬНА ВИСОТА СТАЛЕВИХ ДВОТАВРОВИХ БАЛОК ЗІ ЗМІННОЮ ШИРИНОЮ ПОЛИЦЬ

Артем БІЛИК<sup>1</sup>, Сергій БІЛИК<sup>2</sup>, Олександр ГЛІТІН<sup>3</sup>, Любомир ДЖАНОВ<sup>4</sup>

<sup>1,2,3</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури,  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup>artem.bilyk@gmail.com <http://orcid.org/0000-0002-9219-920X>

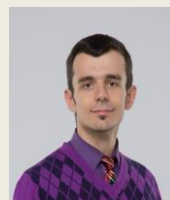
<sup>2</sup>vartist@ukr.net, <http://orcid.org/0000-0001-8783-5892>

<sup>3</sup>o.glitin@gmail.com, <http://0000-0003-1697-6473>

<sup>4</sup>angeldl@ukr.net, <http://orcid.org/0000-0001-5144-3424>

**Анотація.** В статті удосконалено методологічний підхід пошуку найкращого конструктивного рішення балки із зварного сталевго двотавра із змінною шириною полиці. Описано іделізовану фізико-математичну модель конструкцію балки із зварного сталевго двотавра із зміною шириною полиці в залежності від витрат сталі і зміни геометричних характеристик перерізу. За обмеження прийняті умови міцності балки при згині.

Метою досліджень стало розробка підходу, щодо встановлення закономірності раціонального конструктивного рішення в залежності від змінності ширини полиці пружної сталевго двотаврової балки по довжині. Показано, що визначення закономірності зміни напружено-деформованого стану сталевих балок зі змінною шириною полиці при постійній висоті перерізу є актуальною задачею. В результаті досліджень показано вплив зміни ширини полиці двотавра на оптимальні витрати сталі на конструкцію. Встановлена закономірність між параметром змінності ширини полиці і координатою розрахункового перерізу. Підтверджено ефект зменшення розрахункового перерізу балок у бік зменшення геометричних характеристик балок в залежності від ступеня змінності ширини полиці по довжині балки. Так в балках зі змінною шириною полиці при постійній висоті стінки максимальні напруження виникають в перерізі не з максимальними геометричними характеристиками. Отримані аналітичні залежності визначення оптимальної висоти в залежності від змінності ширини полиці. Описано методологію досліджень при пошуку раціонального конструк-



**Артем БІЛИК**

доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій,  
к.т.н., доцент



**Сергій БІЛИК**

завідувач кафедри, професор  
кафедри металевих та  
дерев'яних конструкцій,  
д.т.н., професор



**Олександр ГЛІТІН**

доцент кафедри металевих та  
дерев'яних конструкцій,  
к.т.н., доцент



**Любомир ДЖАНОВ**

асистент кафедри металевих та  
дерев'яних конструкцій

тивного рішення. Показано, що у випадку змінності ширини полиці параметр оптимальної висоти балки залежить від функції розподілу навантаження по довжині балки.

Досліджено консольно-защемлену пружну балку двотаврового перерізу. Через відносний параметр змінності геометричних характеристик показано, що при зміні параметра змінності ширини полиці розрахунковий переріз переміщується у бік вільного кінця із меншими геометричними характеристиками.

© А. БІЛИК, С. БІЛИК, О.ГЛІТІН, Л. ДЖАНОВ, 2023

Проведені дослідження дозволяють обирати оптимальні розміри сталевих зварних двотаврів із зміною шириною полиць для балкових елементів, що сприймають згинальні моменти. За результатами досліджень рекомендовано ступінь змінності перерізу для раціональних конструкцій сталевих двотаврових балок із змінною шириною полиць.

**Ключові слова.** Сталеві балки; балки із змінною шириною полиць; балки із змінною жорсткістю; міцність балок; оптимальний переріз балок.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При швидких темпах економічного зростання кожної країни простежується закономірність збільшення використання сучасних металевих конструкцій в різних будівлях і спорудах. Використання металевих конструкцій у будівництві скорочує терміни будівництва об'єктів та економить інвестиційні та кредитні ресурси.

Пошук найкращого конструктивного рішення для сталевих балок постійного перерізу присвячені відомі дослідження [1,2,3]. Пошуку оптимальної висоти сталевих балок коробчастого перерізу з постійної висотою стінки проведені в дослідженнях [6]. Серед сучасних конструкцій постійного перерізу виділяють сталеві балки з гофрованою стінкою, методика вибору оптимальної висоти приведена у роботі [9].

До сучасних раціональних за витратами сталі металевих конструкцій відносять і сталеві конструкції із змінними по довжині геометричними характеристиками [2,4]. В балкових конструкціях малоповерхових і багатоповерхових будівель, мостів, покриттів стадіонів використання двотаврів зі змінною шириною полиць може бути достатньо ефективним [2,5]. Так дослідження [5] присвячені оптимізації балок з підвищеною гнучкістю стінки при змінній висоті перерізу.

Попередні дослідження міцності балок із сталевих двотаврів зі змінною висотою стінки [2,4] показали що є ефект зміщення розрахункового перерізу: максимальні напру-

ження виникають не в перерізі із максимальними геометричними характеристиками перерізу. Точне визначення напружено-деформованого стану конструкцій змінної жорсткості важливо при дослідженні живучості будівель і споруд [8]. В цьому напрямку важливі дослідження пошуку оптимальних розмірів двотаврових балок змінного перерізу при врахуванні розвитку обмежених пластичних деформацій по висоті перерізу [5].

Тому актуальною задачею є визначення закономірностей напружено-деформованого стану сталевих балок із змінною шириною полиць при постійній висоті перерізу при пошуках раціонального перерізу такої балки та її конструктивної форми. Балкам із змінною шириною полиць присвячена робота по визначення їх прогинів [11].

## ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Створена фізико-математична модель балки змінного перерізу: ширина полиці двотаврової балки змінюється за лінійними законами, стінка постійної висоти ( $h_0$ ) товщиною ( $t_\omega$ ). Балка симетричного перерізу. Гнучкість стінки балки є відношення її висоти до товщини:  $\lambda_\omega \approx h_0/t_\omega$ .

Розглянута консольно-защемлена балка двотаврового перерізу, яка має довжину  $l$ . Ширина полиці  $b_{fz}$  змінюється за лінійним законом.

$$b_{fz} = b_{f0}(1 - \gamma_b \frac{z}{l}). \quad (1)$$

$$z = l \rightarrow b_{fn} = b_{f0}(1 - \gamma_b) \rightarrow \gamma_b = 1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}} \quad (1,a)$$

$$\frac{b_{f0} + b_{fn}}{2} = \frac{b_{f0} + b_{f0}(1 - \gamma_b)}{2} \quad (1,b)$$

$$\frac{b_{f0} + b_{fn}}{2} = \frac{2b_{f0} - \gamma_b b_{f0}}{2} = b_{f0} \left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right) \quad (1,b)$$

де  $b_{f0}$  – максимальна ширина полиці балки в перерізі защемлення.

Максимальний переріз балки співпадає з перерізом з максимальною площею полиць.

Для перерізу з координатою  $z = l$ , ширина полиці буде мінімальною:

$$b_{fn} = b_{f0}(1 - \gamma_b) \quad (2)$$

де  $b_{f0}$  – максимальна ширина полиці балки в перерізі защемлення.

Максимальний переріз балки співпадає з перерізом з максимальною площею полиць. Для перерізу з координатою  $z=l$ , ширина полиці буде мінімальною:  $b_{fn} = b_{f0}(1 - \gamma_b)$  – мінімальна ширина полиці балки.

Зауважимо, при постійному перерізі полиць

$$b_{fn} = b_{f0} \rightarrow \gamma_b = \left(1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}}\right) = 0 \quad (2,a)$$

де  $\gamma_b$  - параметр змінності ширини полиці двотаврової балки.

Варіант 1. Зовнішнє навантаження на балку рівномірно розподілене -  $q$ . Загальна залежність розподілу згинального моменту по довжині балки описується відомою залежністю:

$$M_{xz} = M_{x0} \left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right] \quad (3)$$

Відповідно максимальний розрахунковий згинальний момент буде рівним

$$M_{x0} = ql^2 / 2. \quad (3,a)$$

Зміна геометричних характеристик перерізу балки має такі залежності ( $I_{xz}$  – момент інерції перерізу,  $W_{xz}$  – поточний момент опору перерізу,  $A_{fz}$  – поточна площа перерізу полиці).

$$I_{xz} = \frac{h_0^3 t_w}{12} + \frac{2A_{fz} h_0^2}{4} + \frac{b_{fz} t_f^3}{12} \quad (3,b)$$

$$W_{xz} = \frac{2I_{xz}}{h_0} = \frac{h_0^2 t_w}{6} + A_f h_0 + \frac{b_{fz} t_f^3}{6h_0} \quad (3,b)$$

$$W_{xz} \approx W_{xfz} + W_{xw}; \quad (3,r)$$

$$W_{xw} = h_0^2 t_w / 6. \quad (3,d)$$

$$W_{xfz} = A_{fz} h_0 + b_{fz} t_f^3 / (6h_0). \quad (3,zh)$$

Відповідно площа перерізу полиці буде.

$$A_{fz} = b_{fz} t_f. \quad (4)$$

$$m_z = \rho \int_0^l \left(2b_{f0} \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right) t_f + h_0 t_w\right) dz. \quad (9)$$

Зазвичай прийнято брати приблизний вираз для визначення моменту опору перерізу, нехтуючи значеннями параметру  $t_f^2 / (6h_0)$ ,

приймаючи це відношення достатньо малим за значенням порівняно зі значенням

$$t_f^2 / (6h_0) : t_f^2 / (6h_0) \ll b_{fz} t_f h_0. \quad (5)$$

Поточне значення площі перерізу двотавра із змінною шириною полиці буде.

$$A_z = 2A_{fz} + A_w = b_{fz} t_f + h_0 t_w \quad (6)$$

Момент опору перерізу поточного перерізу записується через момент опору площі перерізу полиці і стінки.

$$W_{xfz} = b_{fz} t_f h_0 + \frac{t_w h_0^2}{6}. \quad (7)$$

$$W_{xfz} = b_{fz} t_f h_0 \left(1 + \frac{t_w h_0}{6b_{fz} t_f}\right). \quad (7,a)$$

Приведений параметр змінності моменту опору двотаврової балки при змінності ширини полиці ( $k_W$ ) буде.

$$W_{xfz} = b_{fz} t_f h_0 k_W \rightarrow k_W = \left[1 + t_w h_0 / (6b_{fz} t_f)\right]. \quad (8)$$

У співвідношеннях (4 та 8) позначено:

$W_{xfz}$  – момент опору перерізу полиць,

$W_{xw}$  – постійний момент опору перерізу стінки

$h_0$  - постійна висота стінки

$t_w$  – товщина стінки

$A_{fz}$  - змінна площа полиці

$b_{fz}$  - змінна ширина полиці

$t_f$  - товщина полиці

Для визначення оптимальної висоти балки із змінною шириною полиці слід побудувати цільову функції. В якості критерію оптимальної висоти балки прийнята мінімальні витрати сталі. Вага балки буде:

Інтегрування дає вираз ваги балки приведені до густини для на погонний метр ( $\frac{m_z}{\rho l}$ ).

$$\frac{m_z}{\rho l} = 2b_{f0}t_f \left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right) + h_0t_w. \quad (9,a)$$

Для складання цільової функції маємо необхідно записати обмеження за міцністю. Якщо не приймати до уваги вплив поперечних сил, умова міцності буде.

$$\sigma_R - \frac{M_{xz}}{k_w A_{fz} h_0} = 0; \quad (9,b)$$

$$\frac{M_{x0} \left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]}{k_w \left(b_{f0}t_f \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)\right) h_0} - \sigma_R = 0. \quad (9,b)$$

$$\frac{m_z}{\rho l} = 2 \frac{\left(\frac{M_{xz}}{\sigma_R}\right)}{h_0 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)} + h_0 t_w \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)}{3 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)}\right] \rightarrow \min \quad (10,b)$$

Або при введенні гнучкості стінки так як товщина стінки балки ( $\lambda_{w0} = h_0/t_w$ ), маємо залежність:

$$\frac{m_z}{\rho l} = 2 \frac{\left(\frac{M_{xz}}{\sigma_R}\right)}{h_0 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)} + \frac{h_0^2}{\lambda_w} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)}{3 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)}\right] \rightarrow \min \quad (10,b)$$

Приведені значення ваги двотаврової балки із змінною шириною полиць ( $\frac{m_z}{\rho l}$ ) за рівнянням (10,в) має вираз лінійного рівняння, яке залежить від трьох змінних: висоти балки ( $h_0$ ), відношення змінності перерізу полиць ( $\gamma_b$ ), і також залежить від закону зміни згинального моменту і відповідно координати перерізу - z. За прийнятою методологією пошуку раціональної висоти балки (оптимальної висоти балки) за якою рівнянням (4) має вираз лінійного рівняння,

$$\left( \frac{\left(\frac{M_{xz}}{\sigma_R}\right)}{h_0 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)} + \frac{h_0^2}{\lambda_w} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)}{3 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)}\right] \right)_{h_0} = 0 \quad (10,d)$$

Критерій мінімізації ваги балки зі змінною шириною полиць матиме вид при обмеженнях (9,в).

$$\frac{m_z}{\rho l} = 2b_{f0}t_f \left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right) + h_0t_w \rightarrow \min \quad (10)$$

$$b_{f0}t_f = \frac{M_{xz}}{\sigma_R h_0 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)} - \frac{h_0 t_w}{6 \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right)} \quad (10,a)$$

Поєднання обмежень з цільовою функцією приводить до лінійного рівняння (10,б).

яке залежить від трьох змінних: висоти балки ( $h_0$ ), відношення змінності перерізу полиць ( $\gamma_b$ ), і також залежить від закону зміни розподілу згинального моменту по довжині балки. Для визначення оптимальної висоти балки із змінною шириною полиці слід прийнято традиційний критерій мінімальних витрат сталі (10,г).

$$\left[\frac{m_z}{\rho l}\right]' = 0 \quad (10,g)$$

Після диференціювання маємо залежність визначення висоти двотаврової балки

з урахуванням змінності перерізу полиць та згинальних моментів.

$$h_{0opt} = \sqrt[3]{\frac{(M_{xz}/\sigma_R)\lambda_w}{\left[(1-\gamma_b\frac{z}{l})-\frac{1}{3}(1-\frac{\gamma_b}{2})\right]}} \quad (11)$$

При

$$M_{xz} = M_{x0} \left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]. \quad (11,a)$$

$$h_{0opt} = \sqrt[3]{\frac{\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]}{\left[(1-\gamma_b\frac{z}{l})-\frac{1}{3}(1-\frac{\gamma_b}{2})\right]}} \sqrt[3]{\left(\frac{M_{x0}}{\sigma_R}\right)\lambda_w} \quad (12)$$

Параметр змінності перерізу та згинальних моментів буде ( $k_{\lambda z}$ ).

$$k_{\lambda z} = \sqrt[3]{\frac{\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]}{\left[(1-\gamma_b\frac{z}{l})-\frac{1}{3}(1-\frac{\gamma_b}{2})\right]}} \quad (12,a)$$

Вираз для визначення оптимальної висоти стає.

$$h_{0opt} = k_{\lambda z} \sqrt[3]{\left(\frac{M_{x0}}{\sigma_R}\right)\lambda_w}. \quad (12,b)$$

Для перерізу з координатою  $z=0$  маємо:

$$k_{\lambda z=0} = \sqrt[3]{\frac{1}{\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)\right]}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2 - \frac{\gamma_b}{2}}} \quad (12,b)$$

При постійному перерізі полиць маємо

$$b_{fn} = b_{f0} \rightarrow \gamma_b = \left(1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}}\right) = 0 \quad (12,g)$$

вираз для визначення оптимальної висоти баки співпадає з відомою формулою [1], що доводить про достовірність виконаних аналітичних досліджень.

$$\gamma_b = 0 \rightarrow h_{0opt} = \quad (12,d)$$

$$h_{0opt} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{(M_{xz}/\sigma_R)\lambda_w}$$

$$h_{0opt} = k_{\lambda} \sqrt[3]{\left(\frac{M_{xz}}{\sigma_R}\right)\lambda_w}, k_{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \approx 1,15 \quad (13)$$

Отримана основна формули (12) пов'язує оптимальну висоту двотаврової сталеві балки ступінь змінності перерізу (параметр змінності перерізу -  $\gamma_b$ ), та розрахунковий згинальний момент. В формулі (12,в) можна перейти назад до товщини стінки.

$$h_{0opt}^3 = \frac{(M_{xz}/\sigma_R)}{\left(1 - \gamma_b\frac{z}{l}\right) \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)}{3\left(1 - \gamma_b\frac{z}{l}\right)}\right]} \lambda_w \quad (14)$$

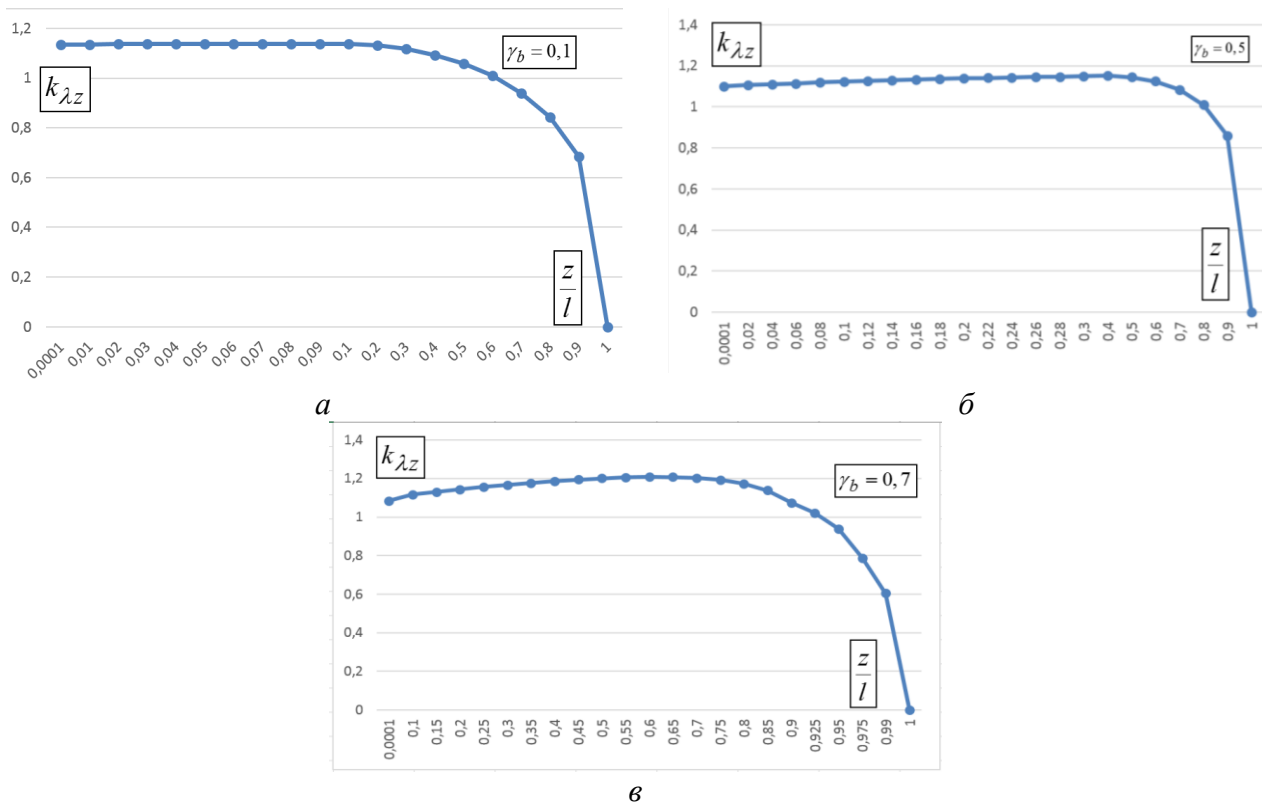
$$h_{0opt}^2 = \frac{(M_{xz}/\sigma_R)}{\left[(1 - \gamma_b\frac{z}{l}) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right)\right] t_w} \quad (14,a)$$

Остаточно буде.

$$h_{zopt} = k_{wz} \sqrt{\frac{(M_{x0}/\sigma_R)}{t_w}}, \quad (15)$$

$$k_{wz} = \sqrt{\frac{3\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]}{\left[2 - \gamma_b\left(3\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\right)\right]}} \quad (15,a)$$

Виконані числові дослідження залежності коефіцієнта оптимальної висоти балки ( $k_{\lambda z}$ ) від характеру навантаження та змінності перерізу полиць ( $\gamma_b$ ). Дослідження проведені для консольної балки з рівномірно-розподіленим навантаженням і показані на рис. 1.



**Рис. 1.** Коefіцієнт оптимальної висоти балки ( $k_{\lambda z}$ ) в залежності від координат перерізів і параметра змінності ширини полиці  $\gamma_b$ : а -  $\gamma_b=0,1$ ; б -  $\gamma_b=0,5$ ; в -  $\gamma_b=0,7$ .

**Fig. 1.** The coefficient of the optimal height of the beam ( $k_{\lambda z}$ ) depending on the coordinates of the sections and the variable parameter of the shelf width  $\gamma_b$ : а -  $\gamma_b=0,1$ ; б -  $\gamma_b=0,5$ ; в -  $\gamma_b=0,7$ .

В таблиці 1 приведені максимальні числові значення параметра оптимальної ви-

соті ( $k_{\lambda z}$ ) для кожного перерізу балки в залежності від ступеня змінності ширини полиці-  $\gamma_b$ .

**Табл. 1.** Значення коefіцієнта  $k_{\lambda z}$

**Tabl. 1.** The value of the coefficient  $k_{\lambda z}$

$z/l$	$\gamma_b$	$k_{\lambda z}$
0,0001	0,001	1,144619
0,07	0,1	1,137371
0,15	0,2	1,134177
0,24	0,3	1,134924
0,3	0,4	1,140552
0,32	0,5	1,150121
0,48	0,6	1,171504
0,62	0,7	1,207868
0,99	0,8	1,354943

При цьому  $\gamma_b = 0,9$  відповідно  $\frac{b_{fn}}{b_{f0}} = 0,1$  відбувається неможливість виконання умов

міцності і плавності перерізу (ефект «хлиста»), тобто кінець балки слід робити більшою висотою перерізу, де виникає максимальні напруження.

Тому є задача дослідити діапазон можливих максимальних значень, які може приймати параметр  $k_{\lambda z}$ .

$$k_{\lambda z} = \sqrt[3]{\frac{3[1 - (\frac{z}{l})^2]}{[2 - \gamma_b(3\frac{z}{l} - \frac{1}{2})]}} \rightarrow \max \quad (16)$$

Умова (16) виконується при умові ( $\gamma_b \neq 0$ ):

$$2 - \gamma_b \left(3\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0; \quad (17)$$

$$2 - \gamma_b \left(3\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (17,a)$$

$$\frac{z}{l} = \frac{2}{3\gamma_b} + \frac{1}{6}. \quad (17,b)$$

Далі, при відносній координаті (17,b) маємо.

$$\gamma_b = 1 \rightarrow \left(\frac{z}{l}\right)_{\max} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (18)$$

Тепер знаходимо максимальне значення  $k_{\lambda z}$  за формулою (16) при  $(z/l)_{\max} = 5/6$ .

$$k_{\lambda z} = \sqrt[3]{\frac{3[1 - (\frac{5}{6})^2]}{[2 - (3\frac{5}{6} - \frac{1}{2})]}} = \sqrt[3]{\frac{33}{36} \frac{1}{[2 - 2]}} \rightarrow \infty \quad (19)$$

Тобто параметр  $k_{\lambda z}$  може приймати нескінченні значення при  $\gamma_b = 1$  та для перерізів  $(z/l)_{\max} \geq 5/6$ .

Тобто визначення оптимальної висоти приймається за розрахунковим перерізом в якому не діє максимальний згинальний момент, так як треба збільшити ступінь змінності перерізу полиць, для забезпечення міцності балки по всіх перерізах по довжині.

Це явища приводить до ефекту злам кінцівки консольної балці змінної жорсткості (злам хлиста подібно до коливань консолі) – виникнення максимальних напружень не в перерізі, де максимальний згинальний момент, а в перерізі, на відстані від вільного кінця, в якому згинальний момент менше, але її момент опору перерізу теж менший.

Для характеристики такого явища наведемо умову міцності балки через поточний момент опору перерізу для будь-якої координати перерізу.

$$b_{f0}t_f \left(1 - \gamma_b \frac{z}{l}\right) h_0 + \frac{h_0^2 t_w}{6} - \frac{M_{x0} [1 - (\frac{z}{l})^2]}{R_y} \geq 0 \quad (20)$$

В початковому перерізі з координатою  $z=0$  момент опору з максимальною шириною полиці ( $W_{x0} = b_{f0}t_f h_0 + h_0^2 t_w / 6$ ) складається з моменту опору перерізу полиць ( $W_{f0} = b_{f0}t_f h_0$ ) і стінки в перерізі ( $W_{xw0} = h_0^2 t_w / 6$ ). Таким чином вірним є співвідношення.

$$W_{x0} = W_{f0} + W_{xw0} \rightarrow W_{f0} = W_{x0} - W_{xw0} \quad (21)$$

Об'єднання останніх рівнянь дає узагальнений критерій міцності поточних перерізів консольної балки по довжині при рівномірно розподіленому навантаженні та міцності сталі за границею текучості  $R_y$ .

$$\frac{b_{f0}t_f(1 - \gamma_b \frac{z}{l})h_0 + h_0^2 t_w / 6}{[1 - (\frac{z}{l})^2] (M_{x0} / R_y)} \geq 1. \quad (22)$$

Прийнято, що розрахунок виконаний за максимальним значенням згинального моменту:

$$(M_{x0} / R_y) = W_{x0} = W_{w0} + W_{f0} \quad (23)$$

Тепер умова міцності (22) приймає вид.

$$\frac{(W_{x0} - W_{w0})(1 - \gamma_b \frac{z}{l}) + W_{w0}}{[1 - (\frac{z}{l})^2] W_{x0}} \geq 1 \quad (24)$$

Після перетворень маємо відношення.

$$\frac{W_{x0}(1 - \gamma_b \frac{z}{l})}{[1 - (\frac{z}{l})^2] W_{x0}} + \frac{W_{w0} [1 - (1 - \gamma_b \frac{z}{l})]}{W_{x0} [1 - (\frac{z}{l})^2]} \geq 1 \quad (25)$$

$$\frac{1 + \left(\frac{W_{w0}}{W_{x0}} - \gamma_b\right) \frac{z}{l}}{[1 - (\frac{z}{l})^2]} \geq 1 \quad (26)$$

Умова (26) виконується завжди при.

$$\frac{W_{w0}}{W_{x0}} - \gamma_b \geq 0 \rightarrow \frac{W_{w0}}{W_{x0}} \geq \gamma_b \quad (27)$$

Таким чином для попереднього призначення ступеня змінності ширини полиці, слід користуватися відношенням

$W_{w0}/W_{x0} \geq \gamma_b$ . Для більш точного розрахунку проводити числові дослідження напружено-деформованого стану балки за формулами (11,12,15).

## ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримані аналітичні залежності пошуку оптимальної висоти балки із змінною шириною полиці при постійній висоті перерізу (7,6,8). При визначенні несучої спроможності балки за максимальним згинальним моментом при рівномірно розподіленому навантаженні по довжині балки виникають ділянки, в яких не виконуються умови міцності. Отримана аналітична залежність (12) яка забезпечує ступінь змінності ширини полиці балки, для виконання умов міцності і уникнути суттєвого збільшення напружень при згині двотаврової балки по довжині при зменшенні ширини полиць.

Дослідження виконані із умови відсутності суттєвого впливу конструктивних коефіцієнтів стінки ( $\psi_w$ ) і полиці ( $\psi_f$ ) на вибір оптимальної висоти двотаврової сталевий балки. Якщо позначити вагу додаткових деталей полиць:  $m_{Df} = \sum m_{Dfi}$ , а вагу додаткових конструктивних деталей стінки  $m_{Df} = \sum m_{Dfi}$ , тоді при вазі полиці балки -  $m_f = b_f t_f \rho l$  та стінки балки -  $m_w = h_0 t_w \rho l$ , конструктивні коефіцієнти стінки і полиць і загальна вага балки приймуть вид.

$$\frac{m_z}{\rho l} = 2\psi_f b_f t_f \left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right) + \psi_w h_0 t_w. \quad (28)$$

$$\psi_f = \frac{m_{Df} + m_f}{m_f}; \quad (28,a)$$

$$\psi_w = \frac{m_{Dw} + m_w}{m_w}. \quad (28,b)$$

Тепер коефіцієнт змінності перерізу згинальних моментів при визначення оптимальної висоти буде.

$$k_{\lambda z} = \sqrt[3]{\frac{\psi_f [1 - (\frac{z}{l})^2]}{\psi_w \left[ (1 - \gamma_b \frac{z}{l}) - \frac{1}{3} (1 - \frac{\gamma_b}{2}) \right]}} \quad (29)$$

Також слід відмітити, що при постійній висоті балки стійкість стінки якщо стінка не має змінну товщину, зазвичай забезпечена, також як і місцева стійкість полиць.

Важливим є вплив умов забезпечення жорсткості балки за другим граничним станом.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Нілов О.О., Пермяков В.О., Шимановський О.В., Білик С.І., Лавріненко Л.І., Бєлов І.Д., Володимирський В.О. Металеві конструкції. /Київ: Видавництво «Сталь», 2010 - 869 с.
2. Гордеев В.Н. Элементарные задачи оптимизации двутавра // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. - 2009. - Вип. 3. - С. 27-48.
3. Білик С. І. Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : дис. доктора. техн. наук : 05.23.01 /С.І. Білик – Київ, 2008. – 460 с.
4. Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I. Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 140-154.
5. Білик С. І. Рациональні рамні каркаси постійного та змінного двотаврового перерізу з підвищеною гнучкістю стінки / С. І. Білик, І.О. Склярів // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. - 2010. - Вип. 5. - С. 199-209.
6. Білик С. І. Конструктивні коефіцієнти та рациональна висота сталевий коробчастої балки постійного перерізу / С. І. Білик, Л. І. Лавріненко // Будівельне виробництво. - 2017. - № 62(1).С. 33-38.



7. **Білик С.І.** Методика визначення оптимальної висоти сталевій двотавровій балки зі змінним перерізом стінки при розвитку обмежених пластичних деформацій // *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського/Відп. ред. О.В. Шимановський.* – К.: Вид-во «Сталь», 2012, вип.9.с. 28-33
8. **Daurov M.K., Bilyk A.S.** Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68.  
<https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.62-68>
9. **Білик А., Нужний В., Джанов Л., Перестюк В.** Особливості аналітичного розв'язку задачі про переміщення консольних сталевих балок зі змінною шириною полиць/А. Білик, // *Зб.наук.праць Будівельні конструкції. Теорія і практика.* № 7 (2020): – С. 85-92.  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.85-92>
10. **Лавриненко Л., Олійник Д.** Области оптимальних параметрів сталевих гофрованих балок // *Зб.наук.праць Будівельні конструкції. Теорія і практика.* Вип 7, 2020 С.45-56.  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.45-56>
11. **Peleshko I., Yurchenko V.** An optimum structural computer-aided design using update gradient method // *Proceedings of the 8th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” (Lithuania, Vilnius, May 19-21, 2004), Faculty of Civil Engineering, Vilnius Gediminas Technical University.* – p. 860-865.
- 12 **Білик С. І., Юрченко В. В.** Оптимізація розміру відгину, що підкріплює полиці, устержневих елементах конструкцій із холодногнутих профілів // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА, 2020. – Вип. 105. – С. 73-86.
13. **Перельмутер А. В., Юрченко В. В.** Дослідження області несучої здатності нонкостінних стержневих елементів із холоднокатаних профілів (Load-bearing capacity region analysis of thin-walled structural members from cold-formed profiles) // *Science and construction.* – No 3 (21), 2019. – p. 42 – 48  
<https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v21i3.110>
14. **Permyakov V. O., Yurchenko V. V., Peleshko I. D.** An optimum structural computer-aided design using hybrid genetic algorithm // *Proceeding of the International Conference “Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures” / Gizejowski, Kozlowski, Slecza & Ziolk (eds.) / Taylor & Francis Group, London, 2006.* – p. 819-826.
15. **Yurchenko V.** Searching for shear forces flows in arbitrary cross-sections of thin-walled bars: numerical algorithm and software implementation // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles.* – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – p. 82 – 111.  
<https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.82-111>.
16. **Pham DC** (2001). Shakedown kinematic theorem for elastic-perfectly plastic bodies. // *Int. J. Plasticity*, 17, pp. 773-780.
17. **Iandiorio C., Salvini. P.** On the Formulation of an Elastic-Plastic Beam Model: the Pre-Integration Idea // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 202, 1214(1):012026.
18. **R. A. C. Slater.** Theory and Application to Metal Forming Processes // *Macmillan*, 1977.- 422p.
19. **Ma J., Welo T.** Analytical springback assessment in flexible stretch bending of complex shapes. // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2021.- 160:1-19.
20. **Ruixue Zhai, Zhuangkun Zhao,** Analytical Prediction of Stretch-Bending Springback Based on the Proportional Kinematic // *Hardening Model*. 2021, 13(12), 2389.

## REFERENCES

1. **Nilov O.O., Permiakov V.O., Shymanovskiy O.V, Bilyk S.I., Lavrinenko L.I., Bielov I.D., Volodymyrskiy V.O.** 2010. Metalevi konstruktsii: Zahalnyi kurs: Pidruchnyk K, Stal, 2010. 869 p. (in Ukrainian)
2. **Gordeev V.N.** 2009. Elementarnie zadachy optymizatsyy dvutavra. // *Zb. nauk. prats Urainskoho naukovo-doslidnoho ta proektnoho instytutu stalevykh konstruktsii imeni V.M. Shymanovskoho. K., Stal, 2009. Vyp.3. Pp. 27 – 48.*
3. **Bilyk S. I.** 2008. Ratsionalni stalevy karkasy malo-energoemnykh budivel iz dvotavriv zminnoho pererizu: diss. doctor technical Sciences: 05.23.01 /C.I. Bilyk - Kyiv, 2008– 460 p.
4. **Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I.** 2018. Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns

- of variable web height // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P.p. 140-154.*
5. **S. I. Bilyk, I.O. Sklyarov.** 2010. Ratsionalny ramny karkasy postiyonoho ta zminnoho dvotavrovoho pererizu iz pidvuschinoiu gnuchkistiui stinky // *Zb. nauk. prats Ukrainskoho naukovodoslidnoho ta proektnoho instytutu stalevykh konstruksii imeni V.M. Shymanovskoho. K., Stal, 2010. Vyp.5. Pp., 199-209.*
  6. **Bilyk S.I., Lavrinenko L.I., Aied Altaie N.** 2017. Konstruktyvni koefitsiienty ta ratsionalna vysota stalevoi korobchastoi balky postiinoho pererizu. // *Budivelne vyrobnytstvo: Vidomchy naukovo-tekhnichnyi zbirnyk (tekhnichni nauky). K., DP NDIBV. 2017. № 62/1. Pp.33 – 38. (in Ukrainian)*
  7. **Bilyk S.I.** 2012. Metodyka vyznachennia optimalnoi vusoty ctalevoi dvotavrovoyi balky zi zminnum pererizom stinky pry rozvytku obmezhenykh plastychnykh deformatsii. // *Zb. nauk. prats Ukrainskoho instytutu stalevykh konstruksii im. V.M. Shymanovskoho. K., Stal, 2012. Vyp.9. – Pp.28 – 33.*
  8. **Daurov M.K., Bilyk A.S.** 2019. Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68*  
<https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.62-68>
  9. **Bilyk A., Nuzhnyi V., Dzhanov L., Perestiuk V.** 2020. Ocobluvosti analitichnoho rozv'iazku zadachi pro peremischnia konsolnykh stalevykh balok zi zminnoiu shirunoiu polutsy. // *zb.nayk.prac Budivelni konstrukcii. Teoriia i praktyka : Kyiv : KNUBA, 2020. - Vyp. 7. - S. 85-92.*  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.85-92>
  10. **Lavrinenko Lyudmila, Danylo Oliinyk.** 2020. Oblasty optimalnykh pastalevykh gofrovykh balok. Lyudmila Lavrinenko, // *zb. nauk. prats Budivelni konstrukcii. Teoriia i praktyka : - Kyiv : KNUBA, Vyp. 7., 2020. - - S.45-56.*  
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.45-56>
  11. **Peleshko I., Yurchenko V.** An optimum structural computer-aided design using update gradient method // *Proceedings of the 8th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” (Lithuania, Vilnius, May 19-21, 2004), Faculty of Civil Engineering, Vilnius Gediminas Technical University. – p. 860-865.*
  12. **Bilyk S. I., Yurchenko V. V.** Optymizatsiia rozmiru vidhynu, shcho pidkripliue po-lytsi, u sterzhnevyykh elementakh konstruksii iz kholodnohnutykh profiliv // *Opir materi-aliv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2020. – Vyp. 105. – S. 73-86.*
  13. **Perelmutter A. V., Yurchenko V. V.** Doslidzhennia oblasti nesuchoi zdatnosti tonkostinnykh sterzhnevyykh elementiv iz kholodnohnutykh profiliv // *Science and construction. – No 3 (21), 2019. – p. 42 – 48.*  
<https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v21i3.110>
  14. **Permyakov V. O., Yurchenko V. V., Peleshko I. D.** An optimum structural computer-aided design using hybrid genetic algorithm // *Proceeding of the International Conference “Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures” / Gizejowski, Kozlowski, Slecza & Ziolkowski (eds.) / Taylor & Francis Group, London, 2006. – p. 819-826.*
  15. **Yurchenko V.** Searching for shear forces flows in arbitrary cross-sections of thin-walled bars: numerical algorithm and software implementation // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – p. 82 – 111.*  
<https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.82-111>
  16. **Pham DC** (2001). Shakedown kinematic theorem for elastic-perfectly plastic bodies. // *Int. J. Plasticity, 17, pp. 773-780.*
  17. **Iandiorio C., Salvini P.** On the Formulation of an Elastic-Plastic Beam Model: the Pre-Integration Idea // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering, 202, 1214(1):012026.*
  18. **R. A. C. Slater.** Theory and Application to Metal Forming Processes // *Macmillan, 1977.- 422p.*
  19. **Ma J., Welo T.** Analytical springback assessment in flexible stretch bending of complex shapes. // *International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2021.- 160:1-19.*
  20. **Ruixue Zhai, Zhuangkun Zhao,** Analytical Prediction of Stretch-Bending Springback Based on the Proportional Kinematic // *Hardening Model. 2021, 13(12), 2389.*

## OPTIMAL HEIGHT OF STEEL I-BEAMS WITH CHANGING THE WIDTH OF THE FLANGES

*Artem BILYK*  
*Sergio BILYK*  
*Oleksandr GLITIN*  
*Lubomir DZHANOV*

**Summary.** The article improves the methodological approach to finding the best constructive solution for a beam made of welded steel I-beams with a variable flange width. An idealized physical-mathematical model of the construction of a beam made of welded steel I-beams with a tapered flange depending on the consumption of steel and changes in the geometric characteristics of the cross-section is described. The bending strength conditions of the beam are taken as limitations. The purpose of the research was to develop an approach to establish the regularity of a rational constructive solution depending on the variability of the width of the flanges of the elastic steel I-beam along its length. It is shown that determining the pattern of changes in the stress-strain state of steel beams with variable shelf width at a constant cross-section height is an urgent task. As a result on the optimal consumption of steel for the structure is shown. A pattern has been established between the variable parameter of the width of the flanges and the coordinate of the calculated section. The effect of displacement of the calculated section of the beams in the direction of a decrease in the geometric characteristics of the beams, depending on the degree of variability of the

width of the shelf along the length of the beam, has been confirmed. Thus, in beams with a variable shelf width at a constant wall height, the maximum stresses occur in the cross-section that does not have the maximum geometric characteristics.

Analytical dependences of determining the optimal height depending on the variability of the width of the flanges were obtained. The methodology of research in the search for a rational constructive solution is described. It is shown that in the case of the variability of the width of the flanges, the parameter of the optimal height of the beam depends on the load distribution function along the length of the beam.

A cantilever-clamped elastic beam of I-beam cross-section was studied. Through the relative parameter of the variability of geometric characteristics, it is shown that when the parameter of the variability of the shelf width is changed, the calculated cross-section moves toward the free end with smaller geometric characteristics.

Corresponding numerical studies have been carried out, which are illustrated by graphs.

The conducted research allows choosing the optimal dimensions of a steel welded I-beam by changing the width of the flanges that perceive bending moments. According to the research results, the degree of variability of the cross-section is recommended for rational designs of steel I-beams by changing the width of the flanges.

**Keywords.** Steel beams; beams with changing the width of the flanges; beams with variable stiffness; the strength of beams; an optimal section of beams.

*Стаття надійшла до редакції 30.04.2023*