

## ВУЗЛОВІ РЕАКЦІЇ ТА КОЕФІЦІЄНТИ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЛІНОМАМИ

Юрій МАКСИМ'ЮК<sup>1</sup>, Олексій ШКРИЛЬ<sup>2</sup>, Іван МАРТИНЮК<sup>3</sup>, Владислав БУЧКО<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup> maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0002-5814-6227

<sup>2</sup> shkryl.oo@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0003-0851-4754

<sup>3</sup> ivan.martinyuk@gmail.com, orcid.org/0000-0001-7957-2068

<sup>4</sup> vlad.buchko.1998@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4668-5469

DOI: 10.32347/2522-4182.9.2021.54-62

**Анотація.** Дослідження призматичних тіл з постійними вздовж однієї з координат механічними і геометричними параметрами найбільш доцільно проводити на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). Суть його полягає в поєднанні скінчено елементної дискретизації і розкладенні переміщень в характерному напрямку по системі тригонометричних координатних функцій.

У роботах [8, 15] розроблено варіант напіваналітичного методу скінченних елементів для розрахунку призматичних тіл при використанні як системи координатних функцій рядів Фур'є. Застосування тригонометричних рядів забезпечує максимальну ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, однак, на торцях тіла вдається задовольнити лише граничним умовам, що відповідають спираючому об'єкту на абсолютно жорстку у своїй площині та гнучку діафрагму.

В результаті виконаних досліджень отримані основні уявлення переміщень поліномами, що дозволяє значно розширити коло граничних умов на торцях тіла. У цьому випадку звести рішення вихідної просторової крайової задачі до послідовності двовимірних задач не є можливим, тому особливого значення набуває обґрунтований вибір відповідних поліномів. Від їх правильного вибору залежить як обумовленість матриці системи роздільних рівнянь і, отже, збіжність інтеграційних алгоритмів її розв'язання, так і універсальність підходу щодо можливості задоволення різних варіантів граничних умов на торцях тіла.



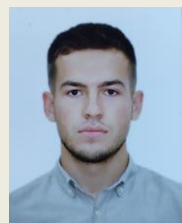
**Юрій МАКСИМ'ЮК**  
професор кафедри будівельної механіки,  
д.т.н., професор



**Олексій ШКРИЛЬ**  
професор кафедри будівельної механіки  
д.т.н.



**Іван МАРТИНЮК**  
докторант кафедри будівельної механіки  
к.т.н.



**Владислав БУЧКО**  
аспірант кафедри будівельної механіки

Крім цього, розглянуте питання про способи інтегрування при обчисленні коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента (СЕ), яке має досить загальне значення, що обумовлено значною трудомісткістю зазначеної процедури.

**Ключові слова.** Метод скінчених елементів (МСЕ); напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ); призматичний скінчений елемент (СЕ1); масивні; тонкостінні призматичні тіла; вектор вузлових реакцій; коефіцієнти матриці жорсткості.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значне число досліджень, пов'язаних з розробкою і застосуванням НМСЕ [5, 6, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 24], як правило, використовуються співвідношення тонких оболонок (в [20] враховані деформації поперечного зсуву). Розглянуто різні питання, пов'язані з урахуванням локальних впливів [21], розрахунком розгалужених і складових систем [10, 14, 17, 24], визначенням напружено-деформованого стану ребристих оболонок змінної товщини при термосилового навантаження [12], орієнтацією підкріплює набору конструктивно-анізотропної оболонки [13]. В [9] запропоновано методику аналізу напружено-деформованого стану циклічно неоднорідних в круговому напрямку оболонок.

У роботах, що відображають застосування напіваналітичного методу скінчених елементів до розрахунку тіл обертання [2,11,18,23,25-27], використані трикутні СЕ з лінійним [2,18,26] і квадратичним [23] розподілом переміщень, прямокутні чотирихвузлові [25] і чотирикутні криволінійні восьмивузлові [27]. Достовірність отриманих на їх основі результатів підтверджена розв'язанням контрольних прикладів [23, 25,26]. Розв'язані також

конкретні задачі про пружне [11,23,26] і пружно-пластичне [2,27] деформування ряду об'єктів.

Різні аспекти розробки і застосування підходу, заснованого на використанні універсального скінченого елемента, що дозволяє досліджувати в пружній і пружно-пластичній постановці масивні і тонкостінні не вісесиметричні навантажені силовими і температурними впливами тіла обертання, розглянуті в роботах [1,7]. Основні принципи узагальнення даної модифікації НМСЕ на розв'язання задач пружного і пластичного деформування циклічних об'єктів зі змінними по круговій координаті механічними і геометричними параметрами викладені в [3]. Публікації [4,19] присвячені реалізації цих принципів стосовно зазначеного класу об'єктів.

Проведений аналіз літературних джерел показує, що в розглянутих публікаціях не знайшли належного відображення питання, пов'язані із застосуванням напіваналітичного методу скінчених елементів до розрахунку тонкостінних призматичних тіл, в пружно-пластичній, а масивних навіть в пружній постановках. Крім того відсутні публікації з даного напрямку, присвячені розробці універсальних призматичних кінцевих елементів, що дозволяють досліджувати масивні, тонкостінні і комбіновані конструкції.

## ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ ТА КОЕФІЦІЄНТІВ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА

Представимо переміщення у вигляді розкладання по поліномах

$$U_n^- = \sum_{l=0}^L U_n^l \varphi^{(l)} \quad (1)$$

де

$\varphi^{(l)}$  - поліноми степені  $l$ ;

$U_n^l$  - коефіцієнти розкладання переміщень по  $\varphi^{(l)}$ .

Виразимо переміщення через коефіцієнти їх розкладання за поліномами відповідно до (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{t=0}^L \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} {}^0\gamma' \\ Z_{,\alpha} S_{(\alpha)} + \left( \begin{matrix} {}^0\gamma' \\ Z_{,12} S_{(\alpha)} + \\ + 2Z_{,\alpha} S_1 S_2 \end{matrix} \right) x^{(3-\alpha)} \end{matrix} \right] \\ \varphi^{(t)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^{-t} \\ \varepsilon_{12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{t=0}^L \frac{1}{4} \left( \begin{matrix} {}^0\gamma' \\ Z_{,1} S_2 + Z_{,2} S_1 \end{matrix} \right) \varphi^{(t)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^{-t} \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{t=0}^L \left\{ \frac{1}{8} \left[ \begin{matrix} {}^0\gamma' \\ Z_{,\alpha} + \left( \begin{matrix} {}^0\gamma' \\ Z_{,12} + \\ + 2Z_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \end{matrix} \right) x^{(3-\alpha)} \end{matrix} \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \varphi_{,3}^{(t)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^{-t} + \frac{1}{4} Z_{,3} \left( S_{\alpha} + 2S_1 S_2 x^{(3-\alpha)} \right) \varphi^{(t)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^{-t} \right\} \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{t=0}^L \frac{1}{4} Z_{,3} \left( 1 + 2S_{\alpha} x^{\alpha} \right) \varphi_{,3}^{(t)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^{-t} \end{aligned} \tag{2}$$

де

Виразимо деформації через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах:

$$\varphi_{,3}^{(t)} = \frac{d\varphi^{(t)}}{dx^3} \tag{3} \quad \{\varepsilon\} = \sum_{t=0}^L \left( \left[ \bar{B}_1 \right] \varphi^{(t)} + \left[ \bar{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(t)} \right) \left\{ \bar{U} \right\}_t \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \left[ \bar{B}_1 \right] &= \left[ \left[ \bar{B}_1 \right]^{(-1,-1)} \left[ \bar{B}_1 \right]^{(+1,-1)} \left[ \bar{B}_1 \right]^{(-1,+1)} \left[ \bar{B}_1 \right]^{(+1,+1)} \right] \\ \left[ \bar{B}_2 \right] &= \left[ \left[ \bar{B}_2 \right]^{(-1,-1)} \left[ \bar{B}_2 \right]^{(+1,-1)} \left[ \bar{B}_2 \right]^{(-1,+1)} \left[ \bar{B}_2 \right]^{(+1,+1)} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

Елементи підматриць  $\left[ \bar{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)}$  і  $\left[ \bar{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)}$

обчислюються згідно (2) та наведені у таблицях 1 та 2, відповідно.

Запишемо вираз варіації енергії через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах і вузлові реакції  $\left\{ \bar{r} \right\}$  кінцевого елемента:

$$\delta W = \sum_{t=0}^L \left( \delta \left\{ \bar{U} \right\}^T \right) \left\{ \bar{r} \right\}_t \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{r} \right\}_t &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left( \left[ \bar{B}_1 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{ \sigma \} \varphi^{(t)} dx^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \bar{B}_2 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{ \sigma \} \varphi_{,3}^{(t)} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Табл. 1.  
Tabl. 1.

$$\left[ \bar{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} 0^1 \\ Z_{,1} S_1 + \left( Z_{,12} S_1 + 2Z_{,1}^0 S_1 S_2 \right) x^2 \end{matrix} \right] & \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} 0^2 \\ Z_{,1} S_1 + \left( Z_{,12} S_1 + 2Z_{,1}^0 S_1 S_2 \right) x^2 \end{matrix} \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} 0^1 \\ Z_{,2} S_2 + \left( Z_{,12} S_2 + 2Z_{,2}^0 S_1 S_2 \right) x^1 \end{matrix} \right] & \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} 0^2 \\ Z_{,2} S_2 + \left( Z_{,12} S_2 + 2Z_{,2}^0 S_1 S_2 \right) x^1 \end{matrix} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} 0^1 \\ Z_{,1} S_2 + Z_{,2} S_1 \end{matrix} \right) & \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} 0^2 \\ Z_{,1} S_2 + Z_{,2} S_1 \end{matrix} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} Z_{,3}^0 (S_1 + 2S_1 S_2 x^2) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} Z_{,3}^0 (S_2 + 2S_1 S_2 x^1) \end{bmatrix}$$

Табл. 2.  
Tabl. 2.

$$\left[ \bar{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} Z_{,3}^0 (1 + 2S_1 x^1 + 2S_2 x^2) \\ \frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} 0^1 \\ Z_{,1} + \left( Z_{,12} + 2Z_{,1}^0 S_2 \right) x^2 \end{matrix} \right] & \frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} 0^2 \\ Z_{,1} + \left( Z_{,12} + 2Z_{,1}^0 S_2 \right) x^2 \end{matrix} \right] & 0 \\ \frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} 0^1 \\ Z_{,2} + \left( Z_{,12} + 2Z_{,2}^0 S_1 \right) x^1 \end{matrix} \right] & \frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} 0^2 \\ Z_{,2} + \left( Z_{,12} + 2Z_{,2}^0 S_1 \right) x^1 \end{matrix} \right] & 0 \end{bmatrix}$$

Інтегруючи по  $x^3$  чисельно, отримуємо формулу для обчислення вузлових реакцій призматичного кінцевого елемента зі змінними у перерізі  $x^3 = const$  механічними та геометричними параметрами (CE1) через напругу:

$$\left\{ r \right\}_i = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^I \left[ \begin{matrix} \left[ \bar{B}_1 \right]^T \left\{ \sigma_1 \right\}_i + \\ + \left[ \bar{B}_2 \right]^T \left\{ \sigma_2 \right\}_i \end{matrix} \right] \sqrt{g} H_i H_l \Big|_{(x_i^1, x_i^2)} \quad (8)$$

Виразивши деформації через коефіцієнти розкладання переміщень за поліномами:

$$\left\{ \sigma_1 \right\}_i = \sum_{m=1}^M \left( \left\{ \sigma \right\} \varphi^{(i)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \quad (9)$$

$$\left\{ \sigma_2 \right\}_i = \sum_{m=1}^M \left( \left\{ \sigma \right\} \varphi_{,3}^{(i)} H_m \right)_{(x_m^3)}$$

Виразимо деформації через коефіцієнти розкладання переміщень за поліномами:

$$\delta w = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{t=0}^L \left( \delta \left\{ \bar{U} \right\}_t^T \right) \cdot \left( \left[ \bar{B}_1 \right]^T \varphi^{(t)} + \left[ \bar{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(t)} \right) \cdot [D] \sum_{n=0}^L \left( \left[ \bar{B}_1 \right] \varphi^{(n)} + \left[ \bar{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{10}$$

Інтегруючи в (10) по  $x^3$  чисельно, і позначивши:

$$\begin{aligned} G_1^m &= \sum_{m=1}^M \left( \varphi^{(t)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \\ G_2^m &= \sum_{m=1}^M \left( \varphi_{,3}^{(t)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \\ G_3^m &= \sum_{m=1}^M \left( \varphi^{(n)} \varphi_{,3}^{(t)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \\ G_4^m &= \sum_{m=1}^M \left( \varphi_{,3}^{(t)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)} \end{aligned} \tag{11}$$

Після інтегрування по  $x^1$  і  $x^2$ , отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного кінцевого елемента зі змінними в перерізі  $x^3 = const$  механічними і геометричними параметрами (CE1):

$$\begin{aligned} \left[ \bar{K} \right]_m &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \left[ \left( \left[ \bar{B}_1 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_1 \right] G_1^m + \left[ \bar{B}_2 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_1 \right] G_2^m + \left[ \bar{B}_1 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_2 \right] G_3^m + \left[ \bar{B}_2 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_2 \right] G_4^m \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \end{aligned} \tag{13}$$

запишемо вираз для варіації енергії деформації у вигляді:

$$\delta W = \sum_{t=0}^L \left( \delta \left\{ \bar{U} \right\}_t^T \right) \left[ \bar{K} \right]_{(m)} \left\{ \bar{U} \right\}_n \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} \left[ \bar{K} \right]_m &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left( \left[ \bar{B}_1 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_1 \right] G_1^m + \left[ \bar{B}_2 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_1 \right] G_2^m + \left[ \bar{B}_1 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_2 \right] G_3^m + \left[ \bar{B}_2 \right]^T [D] \left[ \bar{B}_2 \right] G_4^m \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 \end{aligned}$$

## ВИСНОВКИ

Отримані формули для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості дозволяють використовувати для представлення переміщень різні системи координатних функцій, побудовані на основі поліномів. Відмінна особливість цих співвідношень у порівнянні з аналогічними, виведеними при використанні для подання переміщень рядів Фур'є, полягає в тому, що не рівні нулю коефіцієнти не тільки діагональних, але і периферійних підматриць і рішення систем рівнянь, що одержуються на їх основі, прямими методами стає недоцільним. До чинників, визначальних у разі

ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, ставляться, насамперед, простота завдання умов закріплення на торцях тіла, і величина обсягу обчислень, обумовлена швидкістю збіжності інтеграційного процесу розв'язання систем рівнянь.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Баженов В. А.** Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К.: «Каравела», 2014. – 236 с.
2. **Бобырь В.И., Ищенко Д.А.** Неосесимметричное деформирование тел вращения при простых процессах нагружения. – Киев, 1985, 3 с. – *Рукопись деп. в ВИНТИ, 1985, № 5531-85 Деп.*
3. **Гуляр А.И.** Об одном метода расчета пространственных конструкций на основе обобщения полуаналитического варианта МКЭ для замкнутых некруговых конечных элементов. – *Сопротивление материалов и теория сооружений, 1984, вып. 44, с.44-46.*
4. **Гуляр А.И., Топор А.Г.** Пакет программ прочностных расчетов пространственных конструкций «КРУГ». – *Сопротивление материалов и теория сооружений, 1986, вып. 48, с.28-32.*
5. **Гуляр О.** Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл / О. Гуляр, Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // *Зб. наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 6. – С. 72–84.*
6. **Зенкевич О.К., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986, – 318 с.
7. **Исаханов Г.В., Сахаров А.С., Гуляр А.И., Кархалев В.Н.** Развитие полуаналитического метода конечных элементов для решения задачи пластичности неосесимметрично нагруженных тел. – В кн.: Материалы УІ тематической конференции «Практическая реализация численных методов расчета инженерных конструкций». Л.: Изд-во Ленинград. Дома научн.-техн. пропаганды, 1983, с.12-19.
8. **Иванченко Г.М.** Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінчених елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Иванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // *Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.*
9. **Кантор Б.Я., Гнилько В.И.** Об одном методе изучения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций вращения циклически неоднородных в окружном направлении. – Харьков: Изд. АН УССР, Институт проблем машиностроения, 1982, препринт-171, 20 с.
10. **Кантор Б.Я., Миткевич В.М.** Эффективный метод определения напряженно-деформированного состояния конструкций из оболочек или тел вращения, подкрепленных регулярной системой радиальных пластин при несимметричном радиально-осевом нагружении. – Харьков, 1985, 15 с. – *Рукопись деп. в ВИНТИ, 1985, №2484-85 Деп.*
11. **Кельин В.И., Поляков Ю.Ф.** Сочетание аналитического и численного методов при решении одного класса трехмерных задач теории упругости. – Ленинград, 1985, 10 с. – *Рукопись деп. в ВИНТИ, 1985, № 5462-85 Деп.*
12. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И.** Температурные напряжения в резервуаре для хранения сжиженного газа. – *Расчеты на прочность, 1980, вып. 21, с.216-224.*
13. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И., Игнатъева И.В.** Расчет составных конструктивно-анизотропных оболочек. – *Расчеты на прочность, 1981, вып. 22, с.247-256.*
14. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И., Турбаивский А.Т., Бобель Л.В.** Особенности расчета составных тонкостенных конструкций. – *Расчеты на прочность, 1985, вып. 26, с.227-232.*
15. **Максим'юк Ю.** Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк // *Зб.наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108.*
16. **Максим'юк Ю.** Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування / Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // *Зб. наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20.*

17. **Миткевич В.М., Медведовская Т.Ф.** Напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций вращения. – *Проблемы машиностроения*, 1976, вып. 2, с.21-26.
18. **Савченко В.Г.** Об одном методе решения пространственной неосесимметричной задачи термопластичности. – *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 1978, вып. 18, с.24-29.
19. **Сахаров А.С., Гулярь А.И., Топор А.Г.** Численное решение задач термоупругого равновесия неосесимметрично нагруженных тел вращения. – *Прикладная механика*, 1986, № 6, с.7-13.
20. **Слезина Н.Г.** Расчет оболочек вращения в условиях неосесимметричного нагружения с учетом деформаций поперечного сдвига. – *Труды ЛКИ*, 1977, вып. 116, с.74-81.
21. **Торопова И.Л.** К расчету упругих тонкостенных конструкций вращения при локальном нагружении. – *Прикладные проблемы прочности и пластичности*, 1982, вып. 20, с.52-60.
22. **Maksymyuk Yu.V.** Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies/ Yu.V. Maksymyuk, S.O. Pyskunov, A.A. Shkriil', O.V. Maksymyuk // *Опір матеріалів і теорія споруд– 2020*. – *Bun.* 104. – С. 255–264.
23. **Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rotationskörpern unter Beliebiger nichtrotations-symmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS – Rot. – *Techn. Mitt. Krupp. Forsch.*, 1977, № 2, p.113-126.
24. **Tanz H. –U., Tuns H.T., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rotationsschalen unter beliebiger nichtrotationssymmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS. – *Tech. Mitt. Krupp. Forsch. BRD.* 1978, № 3, s.111-126.
25. **Weese W.** Berechnung nichtrotations symmetrisch belasteter Zylindrischer Körper auf der Grundlage der Fourierreihendarstellung nach der Methode der finite Elemente. – *Wiss. Z. Teehn. Hochsch.*, 1975, 18, 6-7, s.635-642.
26. **Wilson E.L.** Structural Analysis of Axisymmetric solids. – *TAIAA*, 1965, v.3, № 126 p.2269-2274.
27. **Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C.** Plastic ( of visco-plastic ) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical finite element solution. – *Tut. T.*

*Num. Meth. Eng. USA*, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412.

## REFERENCES

1. **Bazhenov V. A.** Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh kontynualnoho ruivuvannia prostorovykh til: Monohrafiia / V.A. Bazhenov, O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov – K. : «Karavela», 2014. – 236 s.
2. **Bobyry V.Y., Yshchenko D.A.** Neosesymetrychne deformyrovanye tel vrashchennia pry prostykh protsessakh nahruzhenia. – *Ky-ev*, 1985, 3 s. – *Rukopys dep. V VYNYTY*, 1985, № 5531-85 Dep.
3. **Huliar A.Y.** Ob odnom metoda rascheta prostranstvennykh konstruktsiy na osnove obobshchennia poluanalytycheskoho varyanta MKЭ dlia zamknutykh nekruhovykh konechnykh elementov. – *Soprotivlenye materialov y teoriya sooruzheniy*, 1984, vyp. 44, s.44-46.
4. **Huliar A.Y., Topor A.H.** Paket prohrann prochnostnykh raschetov prostranstvennykh konstruktsiy «KRUH». – *Soprotivlenye materialov y teoriya sooruzheniy*, 1986, vyp. 48, s.28-32.
5. **Huliar O.** Universalnyi pryzmatychnyi skinchenyi element zahalnoho typu dlia fizychno i heometrychno neliniinykh zadach deformuvannia pryzmatychnykh til / O. Huliar, Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Maksymiuk // *Zb. nauk. prats Budivelni kons-truktsii teorii i praktyka – 2020*. – Vyp. 6. – S. 72–84.
6. **Zenkevych O.K. Morhan K.** Konechnye elementy approksymatsiya. – *M.: Myr*, 1986, – 318 s.
7. **Ysakanov H.V., Sakharov A.S., Huliar A.Y., Karkhalev V.N.** Razvytye poluanalytycheskoho metoda konechnykh elementov dlia reshenia zadachy plastychnosti neosesymetrychno nahruzhenykh tel. – V kn.: *Materialy UI tematycheskoi konferentsiy «Praktycheskaia realizatsiya chyslennykh metodov rascheta ynzhenerykh konstruktsiy»*. L.: *Yzd-vo Lenynhrad. Doma nauchn.-tekhn. propahandy*, 1983, s.12-19.
8. **Ivanchenko H.M.** Pobudova rozviazuvalnykh rivnian napivanalitichnoho metodu skinchennykh elementiv dlia pryzmatychnykh til skladnoi formy / H.M. Ivanchenko, Yu.V. Maksymiuk, A.A. Kozak, I.Iu. Martyniuk // *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system: Nauk.-tekhn. zbirn.* – K.: *KNUBA*, 2021 – Vyp.46 – S. 55-62.

9. **Kantor B.Ia., Hnylko V.Y.** Ob odnom metode yzucheniya napriazhenno-deformirovannogo sostoiانيا tonkostennykh konstruktsyi vrashcheniya tsyklychesky neodnorodnykh v okruzhnom napravlenyy. – Kharkov: *Yzd. AN USSR, Ynstytut problem mashynostroeniya, 1982, prepynt-171, 20 s.*
10. **Kantor B.Ia., Mytkevych V.M.** Эффеk-тивний метод опpеделения napriazhenno-deformirovannogo sostoiانيا konstruktsyi iz obolohek ili tel vrashcheniya, podkrepennykh rehuliarnoi systemoi radyalnykh plastyn pry nesymmetrychnom radyalno-osevom nahruzhenyy. – *Kharkov, 1985, 15 s. – Rukopys dep. v VYNYTY, 1985, №2484-85 Dep.*
11. **Kelyn V.Y., Poliakov Yu.F.** Sochetanye analytycheskoho y chyslennoho metodov pry reshenyy odnogo klassa trekh-ernykh zadach teoryy uprughosti. – *Lenynhrad, 1985, 10 s. – Rukopys dep. v VYNY-TY, 1985, № 5462-85 Dep.*
12. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y.** Температурные napriazheniya v rezervuare dlia khraneniya szhyzhennoho haza. – *Raschety na prochnost, 1980, вып. 21, s.216-224.*
13. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y., Yhnateva Y.V.** Raschet sostavnykh konstruktivno-anizotropnykh obolohek. – *Raschety na prochnost, 1981, вып. 22, s.247-256.*
14. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y., Turbayvskiy A.T., Bobel L.V.** Osobennosti rascheta sostavnykh tonkostennykh konstruktsyi. – *Raschety na prochnost, 1985, вып. 26, s.227-232.*
15. **Maksymiuk Yu.** Osoblyvosti vyvedennia formul dlia obchyslennia vuzlovykh reaktsii i koefitsientiv matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa z userednenymy mekhanichnymy i heometrychnymy parametramy /Yu. Maksymiuk, A. Kozak, I. Martyniuk, O. Maksymiuk // *Zb.nauk. prats Budivelni konstruktсии teoriia i praktyka. – 2021. – Vyp. 8. – S. 97–108.*
16. **Maksymiuk Yu.** Rozviazuvalni spivvidnoshennia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv v zadachakh termoviazkopruzhnoplastychnoho deformuvannia / Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Mak-symiuk // *Zb. nauk. prats Budivelni kons-truktсии teoriia i praktyka – 2019. – Vyp. 4. – S. 10–20.*
17. **Mytkevych V.M., Medvedovskaia T.F.** Napriazhenno-deformirovannoe sostoianye tonkostennykh konstruktsyi vrashcheniya. – *Problemy mashynostroeniya, 1976, вып. 2, s.21-26.*
18. **Savchenko V.H.** Ob odnom metode resheniya prostranstvennoi neosesymmetry-chnoi zadachy termoplastychnosti. – *Teplovye napriazheniya v elementakh konstruktsyi, 1978, вып. 18, s.24-29.*
19. **Sakharov A.S., Huliar A.Y., Topor A.H.** Chyslennoe reshenye zadach termoup-ruhoho ravnovesiia neosesymmetrychno nahruzhenykh tel vrashcheniya. – *Prykladnaia mekhanika, 1986, № 6, s.7-13.*
20. **Slezyna N.H.** Raschet obolohek vra-shcheniya v usloviakh neosesymmetrychnoho nahruzheniya s uchetom deformatsyi pope-rechnoho sdvyha. – *Trudy LKY, 1977, вып. 116, s.74-81.*
21. **Toropova Y.L.** K raschetu uprughykh tonkostennykh konstruktsyi vrashcheniya pry lokalnom nahruzhenyy. – *Prykladnye problemy prochnosti y plastychnosti, 1982, вып. 20, s.52-60.*
22. **Maksimyuk Yu.V.** Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies / Yu.V. Maksimyuk, S.O. Pyskunov, AA Shkril', O.V. Maksimyuk // *Resistance of materials and theory of constructions - 2020. - Issue. 104. - P. 255–264.*
23. **Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W.** Statistic calculation of rotational beacons under beliebiger non-rotational symmetrical loading with the ANTRAS program system - Rot. - *Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, pp.113-126.*
24. **Tanz H. –U., Tuns H.T., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rotationsschalen unter beliebiger nichtrotationssymmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS. – *Tech. Mitt. Krupp. Forsch. BRD. 1978, № 3, s.111-126.*
25. **Weese W.** Berechuug nichtrotatijs symmetrisch belasteter Zylindrischer Korper auf der Yrundlage der Fourierreihendarstellnd nach der Uethode der finite Elemente. – *Wiss. Z. Teehn. Hochsch, 1975, 18, 6-7, s.635-642.*
26. **Wilson E.L.** Structural Analysis of Axi-Symmetric solids. – *TAIAA, 1965, v.3, № 126 p.2269-2274.*
27. **Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C.** Plastic ( of visco-plastic ) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical fic al finite element solution. – *Tut. T. Num. Meth. Eng. USA, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412.*



**NODAL REACTIONS AND  
COEFFICIENTS OF THE STIFFNESS  
MATRIX OF A FINITE ELEMENT  
BASED ON THE REPRESENTATION OF  
DISPLACEMENTS BY POLYNOMIALS**

*Yurii MAKSYMIUK,  
Oleksii SHKRYL,  
Ivan MARTYNIUK,  
Vladyslav BUCHKO*

**Abstract.** The study of prismatic bodies with constants along one of the coordinates of mechanical and geometric parameters is most appropriate to conduct on the basis of the semi-analytical finite element method (NMSE). Its essence is a combination of finite element sampling and decomposition of displacements in the characteristic direction by a system of trigonometric coordinate functions.

In [8, 15], a variant of the semianalytic finite element method for the calculation of prismatic bodies when used as a system of coordinate functions of Fourier series was developed. The use of trigonometric series provides maximum efficiency of the semi-analytical finite element method, however, only the boundary conditions corresponding to the object's support on an

absolutely rigid in its plane and flexible diaphragm can be satisfied at the ends of the body.

As a result of the performed researches, the basis of the representation of displacements by polynomials is obtained, which allows to significantly expand the range of boundary conditions at the ends of the body. In this case, it is not possible to reduce the solution of the initial spatial boundary value problem to a sequence of two-dimensional problems, so a reasonable choice of appropriate polynomials becomes especially important.

Both the conditionality of the matrix of the system of separate equations and, consequently, the convergence of integration algorithms for its solution, and the universality of the approach to the possibility of satisfying different variants of boundary conditions at the ends of the body depend on their correct choice.

In addition, the question of methods of integration in the calculation of the coefficients of the stiffness matrix of a finite element (CE), which is quite common, due to the significant complexity of this procedure.

**Keywords.** Finite element method (FEM), semi-analytic finite element method (SFEM), prismatic finite element (CE1), massive, thin-walled prismatic bodies, vector of nodal reactions, stiffness matrix coefficients.

*Стаття надійшла до редакції 28.10.21*