

# Особливості аналітичного розв'язку задачі про переміщення консольних сталевих балок зі змінною шириною полиць

Артем Білик<sup>1</sup>, Валерій Нужний<sup>2</sup>, Любомир Джанов<sup>3</sup>, Вадім Перестюк<sup>4</sup>

<sup>1,2,2,4</sup> Київський національний університет будівництва і архітектури,  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup>[artem.bilyk@gmail.com](mailto:artem.bilyk@gmail.com), [https:// orcid.org/ 0000-0002-9219-920X](https://orcid.org/0000-0002-9219-920X)

<sup>2</sup>[nuzhnyy@gmail.com](mailto:nuzhnyy@gmail.com), [https:// orcid.org/0000-0002-0400-3204](https://orcid.org/0000-0002-0400-3204)

<sup>3</sup>[angeldl@ukr.net](mailto:angeldl@ukr.net), [https:// orcid.org/0000-0001-5144-3424](https://orcid.org/0000-0001-5144-3424)

<sup>4</sup>[Vadimperestiuk@gmail.com](mailto:Vadimperestiuk@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3309-2349>

DOI: 10.32347/2522-4182.7.2020.85-92

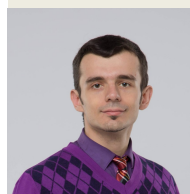
**Анотація.** Стаття присвячена проблемі узагальнення впливу змінності жорсткості пружних сталевих елементів на переміщення та кути повороту в Декартовій системі координат при розміщенні початку відліку координат в центрі ваги найбільшого перерізу. Розглянута консольна пружна двотаврова сталева балка зі змінною шириною полиці.

Отримані формули, які показують вплив змінності перерізу ширини полиць двотаврів на момент інерції перерізу в двох головних площинах. Це дало змогу записати диференціальне рівняння вигину балки, як лінійного рівняння із змінними коефіцієнтами.

Рішення диференціального рівняння дало змогу отримати аналітичні залежності для визначення переміщень і кутів повороту перерізу консольних двотаврових сталевих балок із змінною шириною полиць. Для підтвердження отриманих аналітичних виразів при переході до визначення прогинів і кутів повороту перерізів двотаврових балок з постійним перерізом використано правило Лопітала-Бернуллі. Отримано варіант формули наслідків другої чудової (особливої) границі при розкритті її невизначеності.

Це дало змогу доказати аналітичним підходом співпадіння отриманих рішень з рішеннями для двотаврових балок постійного перерізу. Проведені числові дослідження також підтвердили отриманий результат. Такий підхід може бути розповсюджений для двотаврових балок із змінною шириною полиць при різних умовах обпирання.

Отримані формули переміщень дають змогу перевірити жорсткість консольних сталевих двотаврових балок при лінійній зміні їх жорсткості за обмеженнями граничних прогинів за



**Артем Білик**

доцент кафедри металевих і дерев'яних конструкцій, к.т.н., доцент



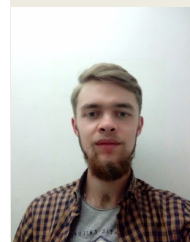
**Валерій Нужний**

асистент кафедри металевих і дерев'яних конструкцій



**Любомир Джанов**

аспірант кафедри металевих і дерев'яних конструкцій



**Перестюк Вадім**

магістрант кафедри металевих і дерев'яних конструкцій

проектом. Отримані результати також можливо використовувати для досліджень двотаврових балок при лінійній зміні жорсткості, у тому числі при зміні модуля деформації сталі при розвитку обмежених пластичних деформацій на окремих ділянках балки.

**Ключові слова.** Пружна сталева балка; консольна балка; двотаврова сталева балка зі змінною шириною полиць; змінна жорсткість бал-

ки; прогини; переміщення; кути повороту перерізу; диференціальне рівняння; згинальний момент; невизначеність границь і правило Лопіталя–Бернуллі.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Раціональне та оптимальне проектування балок змінного перерізу, у тому числі із змінною шириною полиць, відкриває можливість знаходити сучасні конструкції з ефективними витратами сталі. З іншого боку при визначенні максимальної несучої спроможності елементів в узагальненому виді з урахуванням розвитку пластичних деформацій теж вирішується задача із визначення переміщень балок, жорсткість яких змінюється через зміну модуля пружності перерізу. При проектуванні консольних систем значних прогонів, наприклад, навіси над трибунами стадіонів, однією з головних вимог стає розрахунок за другим граничним станом.

У даній статті в узагальненому вигляді наведено аналітичне рішення прогинів і кутів повороту балок з лінійним законом зміни жорсткості перерізу по довжині балки. Це відкриває можливість на першому етапі проектування достатньо близько підібрати раціональний переріз балки з урахуванням впливу зміни жорсткості. Таким чином, аналітичні дослідження є підґрунтям для подальшої задачі раціонального чи оптимального вибору перерізу сталевих балок з урахуванням вимог двох граничних станів.

## АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Наразі існує широке коло досліджень вигину та стійкості пружних елементів змінної жорсткості [1,2,5,6], які заклали теоретичні основи підходів до розрахунку сталевих балок і колон із змінним перерізом. В подальшому ці дослідження розвивались у напрямку вдосконалення аналітичного апарату метода скінчених елементів [2,3]. Також проведені дослідження стійкості та міцності пружних двотаврових елементів із змінною висотою перерізу при апроксимації жорсткості балкових елементів і колон за параболічним законом [4,7,8,12,14,15,16,17]. Мета цих досліджень, через визначення коефіцієнтів розрахункової довжини, привести розрахунки складних рамних систем із двотаврів зі змінною висотою стінки до традиційних підходів перевірки несучої спроможності рам із елементів постійної жор-

ткості [7,8,10,13,14,16,17,18]. Ряд робіт присвячені складним задачам просторовій роботі сталевих елементів змінного перерізу [7,8].

При виборі та розрахунку рамних систем багатопверхових будівель на різні навантаження і впливи [9,11,18] виникає необхідність використовувати двотаври пониженої висоти, або композитні сталезалізобетонні конструкції з двотаврів із пониженою висотою перерізу. В таких конструкціях може бути досягнута більша ефективність за рахунок використання змінності перерізу полиць зварних двотаврових або коробчастих перерізів при сталій висоті профілю. Тому використання таких конструктивних рішень підвищеної ефективності стримується недостатністю узагальнених досліджень з впливу зміни жорсткості балок на деформований стан конструкцій. Результати ряду таких досліджень приведені у наукових працях [7,8,12,15].

Актуальність досліджень дає змогу оцінити не тільки вплив зміни геометричних розмірів конструкції, а і підійти до вирішення інших задач, пов'язаних із зміною жорсткості перерізу по довжині при зміні модуля деформації сталі при розвитку обмежених пластичних деформацій, що важливо при розрахунку конструкцій на живучість [9,11].

## ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянуто вигин пружної двотаврової сталевий балки із змінною шириною полиць та із постійною висотою стінки ( $h_0$ ). Прийнята Декартова система координат, початок якої розташовано у центрі ваги найбільшого перерізу. В основу розрахунку покладені робочі гіпотези вигину балок Ейлера–Бернуллі [1,2].

Прийнята лінійна зміна ширини полиці балки.

$$b_{fn} = b_{f0}(1 - \gamma_{fb}t_z) \rightarrow t_z = 1 \rightarrow \frac{b_{fn}}{b_{f0}} - 1 = -\gamma_{fb}.$$

$$\gamma_{fb} = 1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}}.$$

Площа перерізу профілю змінюється за лінійною залежністю:

$$A_z = 2b_{fz}t_f + h_0t_w = 2b_{f0}(1 - \gamma_{fb}t_z) + h_0t_w,$$

де ( $t_w$  - товщина стінки).

В подальших рівняннях позначено через  $t_z = \frac{z}{l}$ ,  $l$  – довжина балки,  $\gamma_{fb}$ ,  $\gamma_{bx}$  – параметр (ступінь) змінності ширини полиці двотавра,  $b_{f0}$  – ширина полиці при  $t_0 = 0$  (найбільша ширина),  $b_{fn}$  – ширина полиці двотавра при  $t_n = 1$  (найменша ширина), через  $t_z = z/l$  – відносна поточна координата перерізу, з розташуванням початку в найбільшому перерізі.

Геометричні характеристики симетричного перерізу двотаврової сталеві балки при зміні ширини полиць позначено так:  $I_{xz}; I_{x0}; I_{xn}$  – відповідно поточний момент інерції площі перерізу балки, початковий, найбільший момент інерції перерізу балки і найменший момент інерції перерізу балки,

$$I_{xz} = 2b_{f0}(1 - \gamma_{fb}t_z)t_f \frac{h_0^2}{4} + \frac{h_0^3 t_w}{12}.$$

$$I_{x0} = 2b_0 t_f \frac{h_0^2}{4} + \frac{h_0^3 t_w}{12} = \frac{h_0^2}{2} b_0 t_f \left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right).$$

Відповідно, залежності зміни моментів інерції перерізів сталевих балок при зміні ширини полиць відносно головної центральної осі ОХ будуть

$$I_{xz} = b_0 t_f \frac{h_0^2}{2} + \frac{h_0^3 t_w}{12} - \gamma_{fb} b_0 t_f \frac{h_0^2}{2} t_z = I_{x0} - \gamma_{fb} b_0 t_f \frac{h_0^2}{2} t_z.$$

$$I_{xz} = I_{x0} \left( 1 - \frac{b_0 t_f \frac{h_0^2}{2}}{I_{x0}} \gamma_{fb} t_z \right) \quad (1).$$

Вводиться приведені значення параметра зміни моменту інерції перерізу відносно осі ОХ – ( $\gamma_{bx}$ ).

$$\gamma_{bx} = \gamma_{fb} \frac{b_0 t_f}{I_{x0}} \left( \frac{h_0^2}{2} \right)$$

При.  $I_{x0} = \frac{h_0^2}{2} b_0 t_f \left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right)$

$$\gamma_{bx} = \gamma_{fb} \frac{b_0 t_f \frac{h_0^2}{2}}{\frac{h_0^2}{2} b_0 t_f \left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right)}.$$

Остаточно

$$\gamma_{bx} = \gamma_{fb} \frac{1}{\left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right)} \quad (2)$$

Тепер при параметрі зміни ширини полиці  $\gamma_{fb} = \left( 1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}} \right)$  параметр зміни моменту інерції перерізу буде

$$\gamma_{bx} = \gamma_{fb} \frac{1}{\left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}} \right)}{\left( 1 + \frac{h_0 t_w}{6b_0 t_f} \right)}$$

$$I_{xz} = I_{x0} (1 - \gamma_{bx} t_z). \quad (3)$$

Таким чином, встановлена аналітична залежність між параметром зміни перерізу полиці і параметром зміни моменту інерції всього перерізу відносно осі ОХ (2,3).

Відносно іншої осі ОУ закон зміни моменту інерції перерізу ( $I_{yz}$ ) має кубічну залежність

$$I_{yz} = I_{y0} (1 - \gamma_{by} t_z)^3. \quad (4)$$

$$I_{yz} = 2 \frac{b_{f0}^3 t_f}{12} (1 - \gamma_{fb} t_z)^3 + \frac{t_w^3 h_0}{12} \approx \frac{b_{f0}^3 t_f}{6} (1 - \gamma_{fb} t_z)^3;$$

$$\gamma_{by} = \gamma_{fb} = 1 - \frac{b_{fn}}{b_{f0}} \approx 1 - \sqrt[3]{\frac{I_{yn}}{I_{y0}}} \quad (5).$$

**Визначення кутів повороту перерізів консольної з змінною шириною полиць.** Вигин консольної балки, яка завантажена на вільному кінці зосередженою силою –  $P$ . Відповідно згинальний момент вздовж балки змінюється за лінійним законом:  $M_{xz} = Pl(1 - t_z)$ .

Диференціальне рівняння згину балки має запис [8]:

$$EI_{x0}(1-\gamma_{bx}t_z)\eta'' = -Pl(1-t_z) \quad (6,a)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt_z^2} = -\frac{Pl(1-t_z)}{EI_{x0}(1-\gamma_{bx}t_z)} \quad (6,b)$$

Інтегрування диференціального лінійного рівняння (6,б.) дає диференціальну залежність кутів повороту перерізу по довжині балки

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = -\int \frac{Pl^2(1-t_z)}{EI_{x0}(1-\gamma_{bx}t_z)} dt_z + C_1. \quad (7)$$

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = \frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left[ -\frac{1}{\gamma_{bx}^2}(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}t_z) + \frac{1}{\gamma_{bx}^2}(1-\gamma_{bx}t_z) \right] + C_1$$

Коефіцієнт  $C_1$  визначається за граничними умовами защемленого кінця балки:

$$t_z = 0 \rightarrow \frac{d\eta}{ldt_z} = 0$$

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = -\frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left\{ -\frac{1}{\gamma_{bx}^2} + C_1 \right\} = 0$$

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{\gamma_{bx}^2 EI_{x0}} \rightarrow \gamma_{bx} = 1 \rightarrow C_{1\gamma_{bx}=1} = -\frac{Pl^2}{EI_{x0}} \quad (8)$$

Таким чином, закономірність зміни кутів повороту перерізу балки із лінійним законом зміни жорсткості буде

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = \frac{1}{\gamma_{bx}^2} \frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left\{ -(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}t_z) - \gamma_{bx}t_z \right\} \quad (9)$$

Перший випадок:  $t_z = 1$ ;  $\gamma_{bx} \neq 0$ . На вільному кінці балки кут повороту перерізу буде

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = \frac{1}{\gamma_{bx}^2} \frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left\{ -(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) - \gamma_{bx} \right\}.$$

Другий випадок:  $t_z = 1$ ;  $\gamma_{bx} = 1,0$ . Вигин клиноподібної консольної балки

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = \frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left\{ -\frac{1}{1} \right\} = -\frac{Pl^2}{EI_{x0}} \rightarrow \frac{d\eta}{ldt_z} = -\frac{Pl^2}{EI_{x0}} \quad (10)$$

Це рішення співпадає з відомим рішенням [17].

Третій випадок:  $t_z = 1$ ;  $\gamma_{bx} \rightarrow 0$ . Балка має постійний переріз, тоді функція кутів повороту (9) має вигляд

$$\frac{d\eta}{ldt_z} = \frac{Pl^2}{EI_{x0}} \left\{ \frac{-(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) - \gamma_{bx}}{\gamma_{bx}^2} \right\} \quad (11)$$

Отриманий вираз (11) відноситься до випадку невизначеності в теорії границь, так як маємо

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \ln(1-\gamma_{bx}) \rightarrow 0.$$

Тоді рівняння (11) відноситься до випадку невизначеності типу

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \frac{(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}}{\gamma_{bx}^2} = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \frac{0}{0};$$

Використаємо правило Лопіталія-Бернуллі (1696 р.). Так, за ним невизначеність відношення функцій дорівнює відношенню похідних цих функцій:

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \frac{(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}}{\gamma_{bx}^2} \right] = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left\{ \frac{[(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}]'}{[\gamma_{bx}^2]'} \right\}$$

Далі

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left\{ \frac{[(1-\gamma_{bx})\ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}]'}{[\gamma_{bx}^2]'} \right\} = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \frac{-\ln(1-\gamma_{bx})}{2\gamma_{bx}} \right].$$

Але можливий і інший запис останнього рівняння, через формули наслідків другої чудової (особливої) границі:

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma_{bx}} \right)_{\gamma_{bx} \rightarrow 0}^{\frac{1}{\gamma_{bx}}} = e.$$

Тепер вірно

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left\{ \frac{[(1-\gamma_{bx}) \ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}]'}{[\gamma_{bx}^2]'} \right\} = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \frac{-\ln e}{2} \right] = -\frac{1}{2}$$

Остаточною варіант формули наслідків другої чудової (особливої) границі є таким

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \frac{-\ln(1-\gamma_{bx})}{2\gamma_{bx}} \right] = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \frac{-\ln e}{2} \right] = -\frac{1}{2}. \quad (12)$$

Таким чином, доказано що кут повороту вільного кінця консольної балки дорівнює

$$\frac{d\eta}{dt_z} = -\frac{Pl^2}{EI_{x0}} \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1-\gamma_{bx}) \ln(1-\gamma_{bx}) + \gamma_{bx}}{\gamma_{bx}^2} \right\} = \frac{Pl^2}{2EI_{x0}} \quad (13)$$

А це відповідає максимальному куту повороту вільного кінця консольної балки [17] постійного перерізу. Таким чином, підтверджена достовірність отриманої аналітичної формули для визначення кутів повороту консольної балки із змінним перерізом полиць (9).

**Прогин консольної двотаврової балки із змінною шириною полиць.** Інтегрування диференціальної залежності (9) кутів повороту перерізів металеві балки із змінною шириною полиць приводить до аналітичного виразу прогинів консольної балки. Граничні умови закріплення консольної балки: відсутність кутів повороту і переміщень у защемленні приводять до  $C_2 = 0$ .

$$\eta = \frac{Pl^3}{EI_{x0}} \left[ \frac{(1-\gamma_{bx})(1-\gamma_{bx}t_z) \ln(1-\gamma_{bx}t_z)}{\gamma_{bx}^3} + \frac{(1-\gamma_{bx})t_z}{\gamma_{bx}^2} - \frac{t_z^2}{2\gamma_{bx}} \right] \quad (14)$$

Диференціювання отриманого рівняння (14) дає рівняння кутів повороту перерізів (9).

Формула для визначення максимальних переміщень вільного кінця консольної балки буде при будь-якій змінності параметра ширини полиці

$$\eta_n = \frac{Pl^3}{EI_{x0}} \left\{ \frac{(1-\gamma_{bx})^2}{\gamma_{bx}^3} \ln(1-\gamma_{bx}) + \frac{2-3\gamma_{bx}}{2\gamma_{bx}^2} \right\}. \quad (15)$$

Випадок перший - параметр змінності ширини полиць  $\gamma_{bx}=1$ , що відображає форму полиць у вигляді клину, відтоді прогин балки консолі буде

$$\eta_{z=1} = \eta_n = \frac{Pl^3}{EI_{x0}} \left\{ -(1-1)^2 [\ln(1-1)] + \frac{(2-3)}{2} \right\} = -\frac{Pl^3}{2EI_{x0}}. \quad (16)$$

Формула (16) підтверджує достовірність отриманих результатів, так як відповідає рішенням клиноподібної консольної балки із постійною висотою перерізу і змінною шириною [17].

При постійному перерізі консольної сталеві балки  $\gamma_{bx} \rightarrow 0$  останнє рівняння (16) переходить до невизначеності границь типу «0/0». Для розкриття невизначеності двічі скористаємося правилом Лопітала-Бернуллі, і отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1-\gamma_{bx})^2}{\gamma_{bx}^3} \ln(1-\gamma_{bx}) + \frac{2-3\gamma_{bx}}{2\gamma_{bx}^2} \right\} = \\ = -\frac{1}{3} \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ \ln(1-\gamma_{bx}) \frac{-1}{\gamma_{bx}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

За отриманою формулою (12) варіанта формули наслідків другої чудової (особливої) границі рівняння прогинів пружної сталеві консольної балки постійного перерізу (16) для вільного кінця перейде до відомого аналітичного запису [17]:  $\eta_n = \frac{Pl^3}{3EI_{x0}}$ .

Таким чином отримані формули для визначення прогинів пружної консольної балки із змінною шириною полиці (14) та кутів повороту перерізу (9) є вірними і співпадають для граничних форм з відомими аналітичними рішеннями.

## ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Узагальнено отримано аналітичний вираз для визначення прогинів (14) і кутів повороту (9) консольних сталевих балок зі змінною шириною полиці при розташуванні початку координат в центрі ваги найбільшого перерізу. Отримано варіант формул наслідків другої чудової (особливої) границі

$$\lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} \left[ -\frac{\ln(1-\gamma_{bx})}{\gamma_{bx}} \right] = \lim_{\gamma_{bx} \rightarrow 0} [-\ln e] = -1.$$

Це дало змогу аналітично доказати співпадіння отриманих рішень при переході до двотаврових балок постійного перерізу. Проведені числові дослідження також підтвердили отриманий результат. Такий підхід може бути розповсюджений для двотаврових балок із змінною шириною полиць при різних умовах обпирання. Також отримані формули можуть бути використані при лінійній зміні всієї жорсткості балки з урахуванням зміни модуля деформації сталі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **S.P. Timoshenko, and J.M. Gere**, “Theory of Elastic Stability”, New York: Mc-Graw Hill, 1961.
2. **Баженов В.А.** Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії / В.А.Баженов, Ю.В.Ворона, А.В.Перельмутер. – К.: *Каравела*, 2016. – 428.  
<http://scadsoft.com/download/History.pdf>
3. **Bazhenov V.** The heterogeneous prismatic finite element with variable crosssectional area and taking into account the variability of components of metric tensor / V. Bazhenov, A. Shkriil', S.Piskunov, D.Bogdan // *Strength of Materials and Theory of Structures*. – 2010. – Issue. 85. – P. 3- 22.
4. **Bilyk S. I.** Stability analysis of bisymmetrical tapered I-beams / S. I. Bilyk // *Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS–2006): Pzeshow, Poland, 21–23 June 2006-p.* – Pzeshow, 2006. – С.254–255.
5. **Dynnyk A.** Using Bessel functions for tasks The theory of elasticity. Part 2: vibration theory/ AN Dynnyk. - Ekaterinoslav: *Printing house E. I. Kogan*, 1915. - 137 p.
6. **Dynnyk A.** Stability of elastic systems / A.N. Dynnyk. - М.: *ОНТИ*, 1935. -186  
<https://www.twirpx.com/file/2146790/>
7. **Belyy G., Askinazi V.** Overall stability of steel web-tapered members// *Materials Physics and Mechanics*, 31 (2017). – P 63-66  
[https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM131\\_17\\_belyy.pdf](https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM131_17_belyy.pdf)
8. **Білик С. І.** Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : дис. доктора. техн. наук : 05.23.01 /С.І. Білик – Київ, 2008. – 460 с.
9. **Білик А.С., Коваленко А. І.** Сучасні методи моделювання прогресуючого руйнування будівель і споруд // *Строительство. Материаловедение. Машиностроение* : сб. научн. тр..- Днепропетровск. Серия, *Инновационные технологии жизненного цикла объектов жилищно-гражданского, промышленного и транспортного назначения* 87/2016 – С. 35-41.  
<http://library.knuba.edu.ua/pdf>.
10. **Білик С.І.** Порівняння о місцевої стійкості стінок двотаврових балок за ДБН В.2.6-198-2014 і Єврокодом 3 (ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2010) при пружній роботі сталі/ С.І. Білик, Л.І. Лавриненко, Н. Альтайє // *Будівельні конструкції. Теорія і практика. Зб. наук. пр. Вун. І.* – Київ. *МОН України, КНУБА*, 2017. – С. 36–47.  
[http://nbuv.gov.ua/UJRN/budktp\\_2017\\_1\\_8](http://nbuv.gov.ua/UJRN/budktp_2017_1_8)
11. **Daurov M.K., Bilyk A.S.** Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: *KNUBA*, 2019. – Issue 102. – P. 62-68.  
<http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-102/08-102.pdf>
12. **Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I.** Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: *KNUBA*, 2018. – Issue 100. – P. 140-154.  
[http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-100/11-100\\_bylik.pdf](http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-100/11-100_bylik.pdf).
13. **Bilyk S.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data // *Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія. міжнар. наук.-вироб. журн. К., КНУБА, Вун.04/2016, С.89-96.*  
<http://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/12/201604.pdf>
14. **Білик С.І. Білик А.С.** Коефіцієнт стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів з урахуванням початкових деформацій та геометричних недосконалостей / Білик С.І., Білик А.С.// *Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№82. - Дн-вск., ПГАСА, 2015.-С.32-37.*  
<http://srd.pgasa.dp.ua:8080/bitstream/123456789/3402/1/Bilyk.pdf>
15. **Saffari H., Rahgozar R., Jahanshahi R.** An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members// *Journal of Constructional Steel Research*, 64 (2008) – P. 400–406.



[https://www.researchgate.net/profile/Reza\\_Rahgozar/publication/235679033.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Reza_Rahgozar/publication/235679033.pdf)

16. **Sklyarov I.O.** Application of monosymmetrical i-beams in light metal frames with variable stiffness / *Sklyarov I.O. // Odes'kyi Politechnichniy Universytet. Pratsi: Scientific, science and technology collected articles.* — Odesa, 2016. — Issue 1(48). — 106 p. — Language: ENG-UKR. C. 30-34. DOI: [10.15276/opu.1.48.2016.06](https://doi.org/10.15276/opu.1.48.2016.06) [https://www.researchgate.net/publication/301902796\\_application\\_of\\_monosymmetrical\\_i-beams\\_in\\_light\\_metal\\_frames\\_with\\_variable\\_stiffness](https://www.researchgate.net/publication/301902796_application_of_monosymmetrical_i-beams_in_light_metal_frames_with_variable_stiffness)
17. **Писаренко Г.С.** Справочник по сопротивлению материалов // Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев В.В.Матвеев /, - Киев: «Дельта», 2008.-816с.
18. **Білик А.** Методика визначення коефіцієнту розрахункової довжини колон багатопверхових рам шарнірно закріплених на фундаментах/ А. Білик, Є. Цюпин, Л. Джанов // *Зб. наук. пр. Вип. 4. – Київ. МОН України, КНУБА, 2019. – С. 70–77.* DOI: [10.32347/2522-4182.4.2019.70-77](https://doi.org/10.32347/2522-4182.4.2019.70-77) <http://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/18/4/PDF%20V4/8-70-77.pdf>

## REFERENCES

1. **S.P. Timoshenko, and J.M. Gere**, “Theory of Elastic Stability”, *New York: Mc-Graw Hill, 1961.*
2. **Bazhenov V.A.** Budivelnna mekhanika i teoriia sporud. Narysy z istorii (Construction mechanics and the theory of structures. Essays on history) / V.A. Bazhenov, Yu.V. Vorona, A.V. Perelmuter. – K.: *Karavella, 2016. – 428 p. (in Ukrainian)* <https://scadsoft.com/download/History.pdf>
3. **Bazhenov V.** The heterogeneous prismatic finite element with variable crosssectional area and taking into account the variability of components of metric tensor /V. Bazhenov, A. Shkriil', S.Piskunov, D.Bogdan // *Strength of Materials and Theory of Structures.* – 2010. – Issue. 85. – P. 3- 22.
4. **Bilyk S. I.** Stability analysis of bisymmetrical tapered I-beams / S. I. Bilyk // *Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS–2006): Pzeszow, Poland, 21–23 June 2006-p. – Pzeszow, 2006. – C.254–255.*
5. **Dynnyk A.** Using Bessel functions for tasks The theory of elasticity. Part 2: vibration theory/ AN Dynnyk. - *Ekaterynoslav: Printing house E. I. Kogan, 1915. - 137 p.*
6. **Dynnyk A.** Stability of elastic systems / A.N. Dynnyk. - *M.: ONTI, 1935. -186* <https://www.twirpx.com/file/2146790/>
7. **Belyy G., Askinazi V.** Overall stability of steel web-tapered members// *Materials Physics and Mechanics, 31 (2017).* – P 63-66 [https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM131\\_17\\_belyy.pdf](https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM131_17_belyy.pdf)
8. **Bilyk S. I.** Rational steel frameworks of low-power buildings from two-stage worms: dis. the doctors. tech. Sciences: 05.23.01 /S.I. Bilyk - *Kyiv, 2008. - P. 460*
9. **Білик А.С., Коваленко А. І.** Сучасні методи моделювання прогресуючого руйнування будівель і споруд // *Строительство. Материаловедение. Машиностроение : сб. научн. тр..- Днепропетровск. Серия, Инновационные технологии жизненного цикла объектов жилищно-гражданского, промышленного и транспортного назначения 87/2016 – С. 35-41.* <http://library.knuba.edu.ua/pdf>.
10. **Bilyk S.I.** Determination of the minimal stiffness of the double-tee beams according to DBN V.2.6-198-2014 and Eurocode 3 (DSTU-N B EN 1993-1-1: 2010) with spring robot steel / S.I. Bilyk, L.I. Lavrinenko, N. Altaye // *Bu-divelny constructions. Theory and practice. Coll. scienc. pr. rel 1. - Kyiv. MES of Ukraine, KNUCA, 2017. - P. 36–47.* [http://nbuv.gov.ua/UJRN/budktp\\_2017\\_1\\_8](http://nbuv.gov.ua/UJRN/budktp_2017_1_8)
11. **Daurov M.K., Bilyk A.S.** Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68.* <http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-102/08-102.pdf>
12. **Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I.** Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 140-154.* [http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-100/11-100\\_bylik.pdf](http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-100/11-100_bylik.pdf).
13. **Bilyk S.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data // *Підводні технології. Промислова та*

цивільна інженерія. міжнар. наук.-вироб. журн. К., КНУБА, Вип.04/2016, С.89-96. <http://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/12/201604.pdf>

14. **Bilyk S. I.** Reduction factor for buckling of central-compressed steel elements considering initial geometrical imperfections and residual stresses / S.I. Bilyk , A.S. Bilyk // *Construction, materials science, mechanical engineering*. PDABA. Dnipropetrovsk, 2015, no. 82, pp. 32–37. (in Ukrainian). <http://srd.pgasa.dp.ua:8080/bitstream/123456789/3402/1/Bilyk.pdf>
15. **Saffari H., Rahgozar R., Jahanshahi R.** An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members// *Journal of Constructional Steel Research*, 64 (2008) – P. 400–406. [https://www.researchgate.net/profile/Reza\\_Rahgozar/publication/235679033.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Reza_Rahgozar/publication/235679033.pdf)
16. **Sklyarov I.O.** Application of monosymmetrical i-beams in light metal frames with variable stiffness / *Sklyarov I.O. // Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi: Scientific, science and technology collected articles.* — Odesa, 2016. — Issue 1(48). — 106 p. — Language: ENG-UKR. С. 30-34. DOI: [10.15276/opu.1.48.2016.06](https://doi.org/10.15276/opu.1.48.2016.06) [https://www.researchgate.net/publication/301902796\\_application\\_of\\_monosymmetrical\\_i-beams\\_in\\_light\\_metal\\_frames\\_with\\_variable\\_stiffness](https://www.researchgate.net/publication/301902796_application_of_monosymmetrical_i-beams_in_light_metal_frames_with_variable_stiffness)
17. **Pisarenko G.C.** Handbook of material resistance // G.C. Pisarenko, A.P. Yakovlev V.V.Matveev /.- *Kyiv*.: «DeLTA», 2008.- 816 p.
18. **Bilyk A.S.** Method of determining the coefficient of the calculated length of the columns, hinged to the lower end by the method of initial parameters / A.Bilyk, E. Tsyupyn, L. Dzhanov // *36. наук. пр. Вип. 4. – Київ. МОН України, КНУБА, 2019. – С. 70–77.* DOI: [10.32347/2522-4182.4.2019.70-77](https://doi.org/10.32347/2522-4182.4.2019.70-77) <http://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/18/4/PDF%20V4/8-70-77.pdf>

### Features of the analytical solution of the problem of displacement cantilever steel beams with variable flange depth

*Artem Bilyk, Valeriy Nuzhnyi,  
Liubomyr Dzhanov, Vadim Perestiuk*

**Summary.** The article is devoted to the problem of generalization of the influence of the variability of stiffness of elastic steel elements on the displacement and angles of rotation in the Cartesian coordinate system when placing the origin of the coordinates in the center of gravity of the largest cross section. Cantilever elastic I-beam steel beam with variable flange depth is considered.

The obtained formulas are shows the influence of the variability of the I-beam cross-section on the moment of inertia in two main axis. This made it possible to write the differential equation of beam bending as a linear equation with variable coefficients.

The solution of the differential equation makes it possible to obtain analytical formulae for determining the displacements and angles of rotation of the cross section of cantilever I-beams with variable flange depth. To confirm the obtained analytical expressions in the transition to the definition of deflections and angles of rotation of the I-beams with a constant cross-section, the Lopital-Bernoulli rule was used. A variant of the formula for the consequences of the second remarkable (special) boundary in the disclosure of uncertainty is obtained.

This makes it possible to prove by an analytical approach the coincidence of the obtained solutions with the solutions for constant cross-section I-beams. Numerical studies also confirmed the obtained result. This approach can be applied to I-beams with variable flange depth under different support conditions.

The obtained displacement formulas make it possible to check the stiffness of cantilever steel I-beams with a linear change in their stiffness of the beams according to the deflection limits. The obtained results can also be used for research of I-beams with variable flange depth under different support conditions. The obtained displacement formulas make it possible to check the stiffness of cantilever steel I-beams with a linear change in their stiffness of the beams according to the deflection limits. The obtained results can also be used for research of I-beams at linear change of stiffness, including a change of the modulus of deformation of steel at limited plastic work deformations on different sections of a beam.

**Keywords.** Elastic steel beam; cantilever beam; steel beam with variable depth of the flanges; displacements; angles of rotation of the section; uncertainty and the rule of Lopital-Bernoulli