

УДК 624.012.25: 539.319

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗЧЕПЛЕННЯ АРМАТУРИ З
ВИСОКОМІЦНИМ БЕТОНОМ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЦЕПЛЕНИЯ АРМАТУРЫ С
ВЫСОКОПРОЧНЫМ БЕТОНОМ.**

**MATHEMATICAL MODEL OF ARMATURE ADHESION WITH
HIGH-STRENGTH CONCRETE**

Бабич Є.М. д.т.н., проф., Кочкарьов Д.В. к.т.н., доц., Філіпчук С.В. к.т.н., доц., (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Бабич Е.М. д.т.н., проф., Кочкарев Д.В. к.т.н., доц., Филипчук С.В. к.т.н., доц., (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

Babych Y. M. Doctor of technical sciences, Professor, Kochkarev D.V. candidate of technical sciences, docent, Filipchuk S.V. candidate of technical sciences, docent, (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

Наведені результати експериментальних досліджень зчеплення арматури з високоміцним бетоном. Порахована математична модель для визначення граничних напружень зчеплення на поверхні контакту бетону і арматури, за результатами досліджень.

Приведенные результаты экспериментальных исследований сцепления арматуры с высокопрочным бетоном. Посчитана математическая модель для определения предельных напряжений сцепления на поверхности контакта бетона и арматуры, по результатам исследований.

The results of experimental studies of coupling reinforcing concrete with high strength concrete are given. Calculated mathematical model for determining the boundary stresses of adhesion on the contact surface of concrete and reinforcement, according to research results.

Ключові слова:

Міцність, арматура, бетон, зчеплення.

Прочність, арматура, бетон, зчеплення. Strength, armature, concrete, adhesion.

Стан питання та мета досліджень. Зчеплення арматури з бетоном є важливою якістю залізобетону, яка визначає його несучу здатність, жорсткість та тріщиностійкість, залежить від великої кількості факторів: міцності бетону, виду і діаметра арматури, довжини зароблення стержнів у бетон, товщини захисного шару бетону, характеру навантаження, тривалих процесів, гранулометричного складу суміші, природи наповнювачів, умов твердіння, розташування стержнів при бетонуванні тощо. В зв'язку з цим надійність анкерування арматури в залізобетонних конструкціях також залежить від численних факторів, які визначають її зчеплення з бетоном. Із-за великої кількості впливових факторів задача вивчення зчеплення арматури з бетоном складна, але дуже актуальна [1].

На сьогодні значне розширення області використання залізобетонних конструкцій, особливо в фортифікаційних спорудах, потребує застосування високоміцних бетонів класів С70, С80 і вище.

Виходячи з наведеного, метою досліджень є виявлення особливостей зчеплення арматури з високоміцним бетоном, встановлення відповідних розрахункових характеристик міцності зчеплення.

Оскільки відомо, що бетон є пружно-пластичним матеріалом, якому притаманні криволінійні діаграми механічного стану, необхідно вибирати плани для отримання квадратичних залежностей (квадратичної математичної моделі). Наведеним вимогам відповідає матриця плану Бокса – Бенкіна [2].

Методика досліджень. В планованому експерименті за фактори впливу (незалежні змінні) прийнято: x_1 – діаметр стержнів; x_2 – довжина анкерування стержня (довжина заробки стержнів в бетон); x_3 – товщина захисного шару бетону (табл. 1).

Всі фактори мають високий ступінь управління, що дає можливість вибирати заданий рівень варіювання. Для діаметрів стержнів на основному рівні планування (0) прийнятий діаметр 16 мм, а на нижньому (-1) та верхньому (+1) рівнях - відповідно 12 і 20 мм (крок варіювання рівний 4 мм). Такі діаметри стержнів найбільш розповсюджені для армування залізобетонних конструкцій.

До зразків виготовлялися кубики розміром $150 \times 150 \times 150$ мм в кількості 6 штук для визначення кубикової міцності бетону у віці 28 діб і в період випробувань зразків, призми розміром $150 \times 150 \times 600$ мм в кількості 6 штук для визначення призмової міцності бетону й початкового модуля пружності у віці 28 діб та під час випробувань зразків.

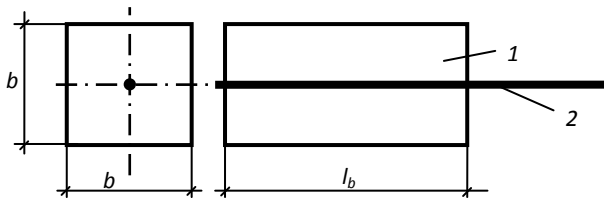
У віці 28 діб середня кубикова міцність для бетону класу С65/70 склала відповідно $f_{cm,cube} = 70,4$ МПа. Середня призмova міцність бетону для прийнятого класу бетону склала $f_{cm,prism} = 58,8$ МПа.

Умови планування експерименту

Фактори		Рівні варіювання			Інтервал варіювання
натуральний вигляд	кодований вигляд	- 1	0	+1	
Діаметр стержнів, d , мм	x_1	12	16	20	4
Довжина анкеровки, l_b	x_2	$5d$	$10d$	$15d$	$5d$
Товщина захисного шару, c	x_3	$1d$	$2d$	$3d$	$1d$

В дослідах використовували арматуру класу А500С діаметром 12, 16 та 20 мм, яка найбільш поширено використовується для армування залізобетонних конструкцій. Індекс Рема для цих стержнів відповідно склав $f_R = 0,070$; $0,075$ та $0,071$ і відповідає середнім значенням, що забезпечують необхідне зчеплення з бетоном.

Основні дослідні зразки виготовляли у вигляді бетонних призм квадратного перерізу, сторони якого дорівнювали 15 см, а висота - запланованій довжині анкерування. Арматурні стержні розташовували в призмах таким чином, щоб їхні поздовжні осі співпадали, а виступаючі з призм частини стержнів дозволяли з одного боку закріплювати в захватах гідравлічного преса, а з другого (вільного) кінця стержнів – вимірювати їхні переміщення відносно торця призм (рис. 1). Всі параметри зразків приймалися відповідно до матриці плану експерименту.



1 – бетонна призма; 2 – арматурний стержень

Рис. 1. Конструктивна схема дослідних зразків

В кожній точці плану виготовляли по три зразки – близнюки, а на основному рівні – шість зразків. Крім цього виготовляли бетонні зразки у вигляді стандартних кубів і призм для визначення міцнісних властивостей бетону при стиску, а також призм для визначення міцності бетону при розтяганні. Всього відповідно до плану було випробувано 18 основних зразки. Формування зразків здійснювали в дерев'яних формах, в які попередньо встановлювалися арматурні стержні.

Дослідження зчеплення арматури з бетоном здійснювали шляхом витягування стержнів із бетонних призм з використанням спеціального реверсного пристрою в розривній гідравлічній машині УИМ–50. Витягування стержнів виконували ступенями, рівними $\Delta F = (0,5 \dots 1,0)$ кН

За граничний стан зчеплення арматури з бетоном приймали зусилля в стержні F_u , коли зміщення його вільного кінця відносно торця призми складало $\delta_u = 0,1$ мм або відбувалося розколювання призми при $\delta < 0,1$ мм.

Результати досліджень. При випробуванні основних зразків для кожного із них у граничному стані визначалися руйнуючі зусилля F_{ui} , за значеннями яких визначалися в кожній точці плану значення граничних напружень зчеплення на контакті стержнів з бетоном f_{bi} , а також їхні середні значення f_{bm} (табл. 2).

Таблиця 2

Матриця плану Бокса-Бенкіна та вихідні експериментальні дані

Точки плану	Матриця плаування			Вихідні параметри, f_b , МПа			
	x_1	x_2	x_3	f_{b1}	f_{b2}	f_{b3}	f_{bm}
1	+1	+1	0	16.5	20	18.8	18.43
2	+1	-1	0	4.4	5.6	4.5	4.83
3	-1	+1	0	6.5	6.5	6.5	6.50
4	-1	-1	0	1.3	1.43	2	1.58
5	+1	0	+1	11	14.6	14.4	13.33
6	+1	0	-1	12.6	13.7	12.8	13.03
7	-1	0	+1	5.4	6.1	6.15	5.88
8	-1	0	-1	3.9	3.96	3.96	3.94
9	0	+1	+1	14.4	13	11.5	12.97
10	0	+1	-1	11.5	11.52	12.7	11.91
11	0	-1	+1	4.25	4.24	4.2	4.23
12	0	-1	-1	3.67	3.5	3.62	3.60
13	0	0	0	9	8.42	9.9	9.45
				9.24	9.9	10.24	

Примітки. 1. В точках плану 1 – 12 виконується по три досліді.
2. В точці плану 13 виконується 6 дослідів (основний рівень)

На основному рівні середні максимальні напруження зчеплення за результатами випробувань шести зразків склали $f_{bm} = 9,45$ МПа.

Повні квадратичні рівняння регресії для описання максимальних напружень зчеплення можна записати у такому вигляді:

$$f_b = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3, \quad (1)$$

де b_0 , b_i , b_{ii} , b_{ij} – вільний член рівняння регресії та коефіцієнти лінійних, квадратичних факторів та факторів взаємодії.

Коефіцієнти рівнянь регресії b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} для трирівневого плану Бокса-Бенкіна визначаються статистичним шляхом за формулами:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} f_{b0}}{n_0}; \quad (2)$$

$$b_i = T_3(i f_b); \quad (3)$$

$$b_{ii} = T_4(ii f_b) + T_5(\sum_{i=1}^3(ii f_b) - T_2(0 f_b)); \quad (4)$$

$$b_{ij} = T_6(ij f_b), \quad (5)$$

де f_{b0} – вихідні параметри на нульовому рівні;

n_0 – кількість дослідів на нульовому рівні (кількість нульових точок);

i, j – номери дослідів (в дослідях $i = 1 \dots 3; j = 1 \dots 3$);

f_b – вихідні параметри (експериментальні дані);

$T_2; T_3; T_4; T_5; T_6$ – розрахункові значення параметрів, які визначаються для конкретних планів методами математичної статистики.

Вільний коефіцієнт, який визначений за формулою (1) за результатами дослідів в нульових точках виявився рівним $b_0 = 9,45$ МПа. Інші коефіцієнти визначали за формулами (2) – (5), в яких розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів знаходилися за формулами:

$$(i f_b) = \sum_1^N x_i f_{bm}; \quad (6)$$

$$(ii f_b) = \sum_1^N x_i^2 f_{bm}; \quad (7)$$

$$(ij f_b) = \sum_1^N x_i x_j f_{bm}; \quad (8)$$

$$(0 f_b) = \sum_1^N x_0 f_{bm}. \quad (9)$$

де N – число точок плану.

Для трирівневого плану Бокса-Бенкіна розрахункові значення параметрів T прийняті такими [2]: $T_2 = 0,1667; T_3 = 0,125; T_4 = 0,25; T_5 = -0,0028; T_6 = 0,25$. Знайдені за формулами (4) – (7) значення коефіцієнтів рівнянь регресії з урахуванням даних таблиці 5 та формул (8) – (11) наведені в таблиці 6. Наприклад:

$$b_1 = T_3(i f_b) = 0,125 \times 31,73 = 3,97;$$

$$b_{11} = T_4(ii f_b) + T_5(\sum_{i=1}^3(ii f_b) - T_2(0 f_b)) = 0,25 \times 67,53 - 0,0028(67,53 + 64,04 + 68,89) - 0,1667 \times 100,23 = -0,39$$

$$b_{12} = T_6(ij f_b) = 0,25 \times 8,68 = 2,17.$$

За значеннями коефіцієнтів регресії можна судити про ступінь впливу відповідного фактора. Коефіцієнти вважаються значимими, якщо розрахункове значення t – критерію Стьюдента виявиться більше табличного, встановленого в залежності від заданого рівня значимості і кількості степенів свободи. Доцільно оцінювати значимість коефіцієнту b_0 за результатами випробувань в нульових точках, а всі інші – в усіх точках плану.

Середньоквадратичні відхилення результатів дослідів в нульових точках $S_{\{f_{b_0}\}}$ і в інших точках плану $S_{\{f_{b_i}\}}$ визначимо відповідно за формулами:

$$S_{\{f_{b_0}\}} = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_0} (f_{b_{0i}} - f_{b_{0m}})^2}{n_0 - 1}}; \quad (10)$$

$$S_{\{f_{b_i}\}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N \sum_1^r (f_{b_{ij}} - f_{b_{im}})^2}{N(r-1)}}; \quad (11)$$

де n_0 – кількість дослідів в нульових точках ($n_0 = 6$);

N – кількість строчок плану за винятком нульових ($N = 12$);

r – кількість дослідів в строчці ($r = 3$).

Середньоквадратичні відхилення визначимо за формулою:

$$S_{\{f_{b_i}\}} = \sqrt{\frac{\sum S_{\{f_{b_i}\}}^2}{N(r-1)}} = \sqrt{\frac{21.886}{12(3-1)}} = 0,955.$$

Для знаходження теоретичних значень t – критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта рівняння регресії необхідно визначити середньоквадратичні помилки за формулами:

$$S_{\{b_0\}} = T_7 S_{\{f_{b_0}\}}; S_{\{b_i\}} = T_8 S_{\{f_{b_i}\}}; S_{\{b_{0i}\}} = T_9 S_{\{f_{b_{0i}}\}}; S_{\{b_{ij}\}} = T_{10} S_{\{f_{b_{ij}}\}}; \quad (12)$$

де T_7, T_8, T_9, T_{10} – коефіцієнти, які для трьохрівневого плану Бокса – Бенкіна приймаються рівними $T_7 = 0,5774$; $T_8 = 0,3536$; $T_9 = 0,5204$; $T_{10} = 0,5$.

За формулою (14) значення середньоквадратичних помилок виявилися рівними:

$$S_{\{b_0\}} = 0,5774 \times 0,312 = 0,18;$$

$$S_{\{b_1\}} = S_{\{b_2\}} = S_{\{b_3\}} = 0,3536 \times 0,955 = 0,338;$$

$$S_{\{b_{11}\}} = S_{\{b_{22}\}} = S_{\{b_{33}\}} = 0,5204 \times 0,955 = 0,497;$$

$$S_{\{b_{12}\}} = S_{\{b_{13}\}} = S_{\{b_{23}\}} = 0,5 \times 0,955 = 0,477;$$

За формулою (12) обчислені значення середньоквадратичного відхилення для дослідів в нульових точках, що виявилось рівним $S_{\{f_{b_0}\}} = 0,312$. Розрахункові значення t – критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта рівняння регресії знаходили за формулами [2]:

$$t_{\{b_0\}} = \frac{|b_0|}{S_{\{b_0\}}}; \quad t_{\{b_i\}} = \frac{|b_i|}{S_{\{b_i\}}}; \quad t_{\{b_{0i}\}} = \frac{|b_{0i}|}{S_{\{b_{0i}\}}}; \quad t_{\{b_{ij}\}} = \frac{|b_{ij}|}{S_{\{b_{ij}\}}}. \quad (13)$$

Табличні значення t_m -критерія Стьюдента визначимо для рівня значимості 0,05 залежно від кількості степенів свободи. Для коефіцієнтів b_0 кількість степенів свободи складає $f_{\{b_0\}} = n_0 - 1 = 6 - 1 = 5$, а для

інших коефіцієнтів $-f_{\{b\}} = N(r - 1) = 12(3 - 1) = 24$. Відповідно табличний t_m -критерій Стьюдента складає: для коефіцієнтів b_0 $t_m = 2,57$, а для інших коефіцієнтів $-t_m = 2,06$.

Порівнюючи значення розрахункових і табличних критеріїв приходимо до висновку, що в рівнянні можна не брати до уваги коефіцієнти t_{b13} і t_{b23} . Для коефіцієнтів при квадратичних факторах значення розрахункових коефіцієнтів менші за табличні, але при квадратичних факторах не рекомендується нехтувати коефіцієнтами рівнянь регресії [2].

Кінцево рівняння регресії, які можна вважати як математичні моделі для визначення граничних напружень зчеплення на поверхні контакту бетону і арматури, за результатами досліджень можна записати у такому вигляді:

$$f_b = 9,45 + 3,97x_1 + 4,45x_2 + 0,49x_3 - 0,39x_1^2 - 1,26x_2^2 - 0,05x_3^2 - 2,17x_1x_2, \quad (14)$$

Отримане рівняння регресії адекватно описує результати експериментальних досліджень, оскільки розрахункове значення F -критерія Фішера менше за табличне значення. Розрахункове значення F -критерія Фішера знаходили за формулою

$$F_p = \frac{S_{\{f_b\}}^2}{S_{ад}^2} \quad (15)$$

де $S_{\{f_b\}}^2$ – дисперсія відтворюваності вихідного параметра, яка визначається за формулою

$$S_{\{f_b\}}^2 = \frac{\sum_1^N \sum_1^r (f_{bi} - f_{bm})^2}{N(r-1)}, \quad (16)$$

де \sum_1^N – сума за стовпцями матриці; \sum_1^r – сума за рядками матриці;

$S_{ад}^2$ – дисперсія адекватності, яку визначали за формулою

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N-m} \sum_1^N (f_{b,теор} - f_{bm})^2, \quad (17)$$

де m – число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії ($m = 7$);

$f_{b,теор}$ – розрахункове значення вихідного параметра;

f_{bm} – вихідний параметр за результатами експериментальних випробувань.

Дисперсія відтворюваності вихідного параметра (граничних напружень зчеплення) за формулою (16) $S_{\{f_b\}}^2 = 0,912$.

Дисперсія адекватності за формулою (17) виявилися $S_{ад}^2 = 0,76$. За формулою (15) розрахункове значення F -критерія Фішера рівне $F_p = 1,19$. Табличний коефіцієнт з забезпеченістю 0,95 при більшій ступені свободи 24 і меншій 6 дорівнюють $F_m = 2,55$. Оскільки табличний критерій більше

розрахункового, то побудоване рівняння регресії адекватно описуює отримані експериментальні дані.

Адекватність рівняння можна підтвердити іншими статистичними показниками (табл. 3). Так середнє відношення експериментальних значень граничних напружень зчеплення арматури з бетоном до теоретичних, визначених за формулою (14) склало $f_{bm}/f_{b,теор} = 1,01$. Середньоквадратичні відхилення склало 0,065, а коефіцієнти мінливості 0,065, що менше допустимого нормованого для бетону 0,135.

Висновок. Таким чином, отримане рівняння регресії (16) може бути використане для аналізу впливу окремих факторів на граничні напруження на поверхні бетону з арматурою, а також для нормування граничних напружень зчеплення.

1. Зчеплення з бетоном арматури серпоподібного профілю та її анкерування в згинальних залізобетонних елементах: Монографія / Є. М. Бабич, В. Є. Бабич, О. Є. Поляновська .- Рівне: «Волинські обереги», 2017. – 160 с. **2.** Дворкін Л.Й. Розв’язування будівельно-технологічних задач методами математичного планування експерименту / Л.Й. Дворкін, О.Л. Дворкін, В.В. Житковський. – Рівне: НУВГП, 2011. – 174 с. **3.** Дворкін Л.Й., Бабич Є.М., Житковський В.В., Бордюженко О.М., Філіпчук С.В., Кочкаръов Д.В., Ковалик І.В., Ковальчук Т.В., Скрипник М.М. Високоміцні швидкотверднучі бетони та фібро бетони – Рівне: НУВГП, 2017. 331 с.