

УДК 624.012.45

**РОЗРАХУНОК БАЛОК ПОРОЖНИСТОГО ТРИКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ З ЗАСТОСУВАННЯМ АДАПТОВАНОЇ ТЕОРІЇ СКЛАДЕНИХ СТРИЖНІВ**

**РАСЧЕТ БАЛОК ПОЛОГО ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИРОВАННОЙ ТЕОРИИ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

**CALCULATION OF BEAMS OF A FULL TRIANGLE SECTION WITH THE USE OF THE ADAPTED THEORY OF COMPOSITE RODS**

**Азізов Т.Н.** д.т.н., проф. (Уманський державний педагогічний університет, м.Умань), **Сакр Ель Гадбан,** аспірант (Одеська державна академія будівництва і архітектури, м. Одеса)

**Азизов Т.Н.** д.т.н., проф. (Уманский государственный педагогический университет, г. Умань), **Сакр Эль Гадбан,** аспірант (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

**Azizov T.N.,** Doctor of Engineering, **Profesor** (Uman State Pedagogical University), **Sakr El Gadban** (Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture)

Наведена методика розрахунку балок порожнистого трикутного перерізу за допомогою теорії складених стрижнів, яка адаптована до розрахунку таких балок. Рішення прийнято у тригонометричних рядах, які швидко збігаються. Показано, що застосування теорії складених стрижнів дозволяє враховувати зусилля, які можуть відірвати полку балки від ребер.

Приведена методика расчета балок полого треугольного сечения с помощью теории составных стержней, которая адаптирована к расчету таких балок. Решение принято в тригонометрических рядах, которые весьма быстро сходятся. Показано, что применение теории составных стержней позволяет учитывать усилия, которые могут оторвать полку балки от наклонных ребер.

The method of calculation of beams of a hollow triangular section is described in the article. The calculation was carried out using the theory of composite rods. This theory is adapted to the calculation of such beams. The decision is made in trigonometric series, which quickly converge. It is

shown that the application of the theory of composite rods allows to take into account the forces that can tear off the beam shelf from inclined ribs.

**Ключові слова:**

Складені стержні, тригонометричний ряд, диференціальне рівняння, балка, трикутний переріз, в'язи зсуву, поперечні в'язи.

Составные стержни, тригонометрический ряд, дифференциальное уравнение, балка, треугольное сечение, связи сдвига, поперечные связи.

**Composite rods, trigonometric series, differential equation, beam, triangular section, shear connections, transverse connections.**

**Состояние вопроса и задачи исследования.**

В последнее время перекрытия и покрытия рассчитывают с учетом пространственной работы, когда усилия перераспределяются между отдельными элементами неравномерно. Эффект пространственной работы проявляется тем больше, чем больше крутильная жесткость элементов из которых состоит перекрытие. Одним из эффективных сечений, в которых крутильная жесткость большая, является сечение в виде полого треугольника. Применение в перекрытиях балок такого типа позволяет существенно увеличить эффект пространственной работы.

В виду сложной формы поперечного сечения таких балок было предложено изготавливать их в сборно-монолитном варианте, когда сначала конструкция бетонируется в плоском виде, потом трансформируется в балку полого треугольного сечения и замоноличиваются швы. Работа таких конструкций имеет свою специфику. Их крутильная жесткость исследована, однако напряженно-деформированное состояние таких балок при изгибе пока не исследовано.

В связи со сказанным, **целью настоящей статьи** является исследование напряженно-деформированного состояния при изгибе железобетонных балок полого треугольного сечения.

**Изложение основного материала.** Рассмотрим инженерную методику расчета балок полого треугольного сечения. Использование этой методики может быть весьма полезным на предварительных этапах расчета для принятия размеров поперечного сечения балки, ее армирования. Она отличается своей простотой и в тоже время своей относительно высокой точностью. Кроме того, применение этой методики, позволяет достаточно просто учитывать изменение жесткостей составляющих балки в результате трещинообразования.

Сборно-монолитную балку полого треугольного сечения можно представить в виде двухслойного составного стержня (рис. 1). При этом верхний стержень моделирует работу верхней полки балки, нижний стержень – V-образную нижнюю часть балки (две ее наклонные боковые грани). Оба стержня соединены швом, жесткость которого может иметь

как конечное значение, так и бесконечное. Ширина (толщина) шва также в общем случае может быть как нулевой, так и иметь конечное значение.

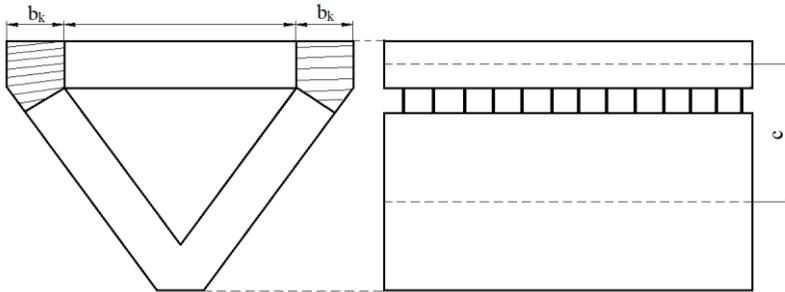


Рис. 1. Представление балки полого треугольного сечения в виде двухслойного составного стержня

Расчет будем вести с использованием теории составных стержней А.Р. Ржаницына [2] с некоторыми изменениями по [1]. Подобное решение было использовано авторами для расчета совместной работы ригелей и сборного настила. Приведем методику, адаптированную к расчету рассматриваемых в настоящей статье конструкций.

Если рассчитывается одиночная балка полого треугольного сечения без учета ее взаимодействия с смежными балками (например, в перекрытии), то ввиду малого влияния вертикальных усилий взаимодействия верхнего стержня (полки балки полого треугольного сечения) с нижним (наклонных ребер) жесткость поперечных связей составного стержня можно принять равной бесконечности. Жесткость же связей сдвига будет определяться жесткостью монолитного шва, объединяющего верхнюю полку с боковыми гранями.

Осевую жесткость верхнего составляющего стержня следует принимать из условия, что его толщина равна толщине верхней полки балки. Коэффициент жесткости связей сдвига  $\xi$  примем как для бетонной полосы шириной сечения  $2b_k$  (см. рис. 1) и высотой, равной толщине верхней полки  $h_f$  с включением вертикальных стержней арматуры как сумма коэффициентов жесткостей бетона омоноличивания и арматуры.

Единичный сдвиг бетонной полосы определится по [3]:

$$\Delta_b = \frac{c}{d_b G_b} \quad (1)$$

где  $d_b=2b_k$  – толщина шва – удвоенная ширина монолитных участков;  $G_b$  – модуль сдвига бетона шва омоноличивания;  $C$  – высота шва, условно равная толщине полки  $h_f$ .

Рассмотрим определение коэффициента жесткости для поперечных стержней. Схему для его определения можно представить в виде стержня, оба конца которого жестко защемлены. При перемещении одного из

концов стержня на величину  $\Delta=1$  реакции  $R_A$  на его концах в соответствии с методом перемещений [4]:

$$R_A = \frac{12EJ}{C^3}, \quad (2)$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость арматурного стержня.

Следовательно, при  $R_A=1$  будем иметь:

$$\Delta_s = \frac{C^3}{12EJ} \quad (3)$$

Если на единице длины расположено  $n$  стержней, то единичный сдвиг:

$$\Delta_s = \frac{C^3}{12 \cdot EJ \cdot n} \quad (4)$$

Суммарный сдвиг бетона и  $n$  стержней равен:

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s = \frac{C}{d_b G_b} + \frac{C^3}{12 \cdot EJ \cdot n} \quad (5)$$

Коэффициент жесткости представляет собой величину, обратную  $\Delta$ , т.е.:

$$\xi = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\frac{C}{d_b G_b} + \frac{C^3}{12 \cdot EJ \cdot n}} \quad (6)$$

Перейдем теперь непосредственно к расчету системы «верхняя полка - наклонные ребра» как составного стержня.

В [2] выведено дифференциальное уравнение для двухслойной составной балки из двух брусьев с абсолютно жесткими поперечными связями и податливыми связями сдвига. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{T''}{\xi} = \gamma \cdot T + \Delta, \quad (7)$$

где  $T=T(x)$  – суммарные сдвигающие усилия между составляющими стержнями, связанные с погонными касательными усилиями  $\tau(x)$  (рис. 2) зависимостью:

$$T(x) = \int_0^x \tau(x) d \cdot x, \quad (8)$$

$\gamma$  - параметр, зависящий от изгибных и осевых жесткостей составляющих стержней:

$$\gamma = \frac{1}{EF_1} + \frac{1}{EF_2} + \frac{C^2}{\Sigma EI}, \quad (9)$$

$EF_1, EF_2$  – соответственно осевые жесткости первого (верхнего) и второго (нижнего) составляющих стержней;  $C$  – расстояние между осями составляющих стержней;  $\Sigma EI$  – суммарная изгибная жесткость двух составляющих стержней (в нашем случае она будет равна сумме изгибной

жесткости полки и изгибной жесткости боковых ребер;  $\Delta$  - величина, зависящая от нагрузки и жесткости составляющих стержней и равная [2]:

$$\Delta = -\frac{M^0 \cdot C}{\Sigma EI}, \quad (10)$$

где  $C$  и  $\Sigma EI$  – то же, что и в формуле (9);  $M^0$  – суммарный изгибающий момент от внешней нагрузки в сечениях каждого составляющего стержня основной системы. На рис. 2. Представлена схема составного стержня, подобно тому, как это было сделано в [1] для расчета совместной работы сборного настила с ригелем. В нашем случае, как было сказано выше, роль верхнего стержня играет верхняя полка, а нижнего – V-образный стержень из наклонных ребер рассматриваемой балки полого треугольного сечения.

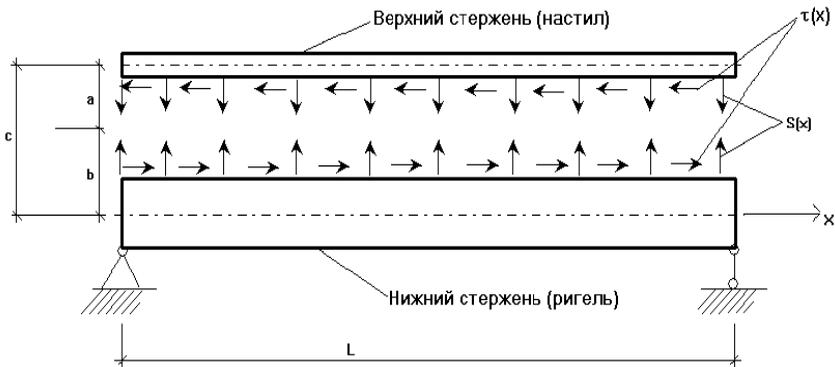


Рис. 2. Усилия, действующие в плоскости рассечения составного стержня

В [2] приведено решение уравнения (7) в гиперболических функциях, что при численной реализации может привести к погрешностям, т.к. значения гиперболического синуса и косинуса может быть многозначным числом. Весьма простой способ решения уравнения (7) получится, если использовать тригонометрические ряды Фурье подобно [1].

В случае, когда сдвигу торцов составляющих стержней друг относительно друга ничего не препятствует (в случае расчета рассматриваемой нами конструкции это именно так), граничные условия для  $T(x)$  будут иметь вид:  $T(0)=T(L)=0$ . Тогда решение уравнения (7) можно принять в виде:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \text{Sin}(\alpha \cdot x), \quad (11)$$

где  $\alpha = \pi n/L$ ,  $T_n$  – коэффициенты Фурье, подлежащие определению.

Подставив выражение (11) в (7), разложив функцию изгибающего момента также в ряд по синусам и сократив на  $\text{Sin}(\alpha \cdot x)$ , получим уравнение для определения неизвестных коэффициентов  $T_n$ :

$$-T_n \cdot \alpha^2 - \xi \cdot \gamma \cdot T_n = \frac{C}{\Sigma EI} \cdot M_n, \quad (12)$$

решив которое, найдем значение  $T_n$ :

$$T_n = -M_n \cdot \frac{C}{\Sigma EI} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \xi \cdot \gamma)}, \quad (13)$$

где  $M_n$  – коэффициент разложения функции изгибающего момента от внешней нагрузки в ряд по синусам.

Величина  $T_n$  определяется  $m$  раз, где  $m$  – верхний предел суммирования ряда (11), который достаточно быстро сходится.

Продифференцировав один раз выражение (11), получим функцию распределения погонных касательных усилий  $\tau(x)$ .

Выше мы рассмотрели методику расчета, когда пренебрегли усилиями в поперечных связях (в вертикальном направлении).

Однако, в системе «верхняя полка – боковые ребра» появляются еще и вертикальные усилия взаимодействия, способные в некоторых случаях отрицательно повлиять на совместную работу элементов системы. Такой случай может иметь место, если рассчитывается не отдельно лежащая балка полого треугольного сечения, а балки, совместно работающие в перекрытии. В этом случае усилия взаимодействия смежных балок могут отрывать верхнюю полку от наклонных ребер (рис. 3).

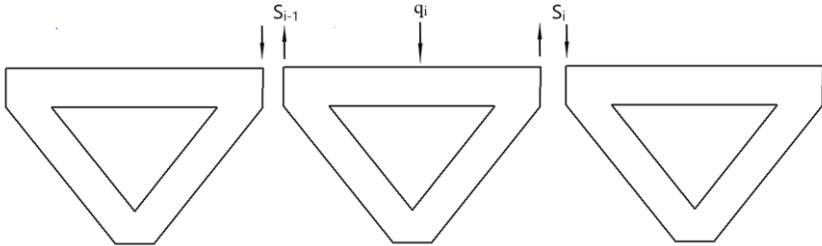


Рис. 3. Схема действия вертикальных усилий взаимодействия балок друг с другом

Рассмотрим метод определения усилий взаимодействия между верхней полкой и боковыми ребрами, который также основан на использовании теории составных стержней. Для этого используем систему дифференциальных уравнений, полученную в [2] для случая, когда оба вида связей составного стержня являются упруго-податливыми, для изгибающих моментов  $MS$  от вертикальных сил в поперечных связях  $S$  и касательных сил  $T$ :

$$\frac{T''}{\xi} = gT + i \cdot MS + g_0;$$

$$\frac{-MS^{IV}}{\eta} = iT + k \cdot MS + K_0, \quad (14)$$

где обозначено [2]:

$$g = \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} + \frac{a^2}{E_1 I_1} + \frac{d^2}{E_2 I_2}; \quad i = -\frac{a}{E_1 I_1} + \frac{d}{E_2 I_2}; \quad k = \frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}; \quad (15)$$

$$g_0 = -\frac{M_1^0 a}{E_1 I_1} - \frac{M_2^0 d}{E_2 I_2} - \frac{N_1^0}{E_1 A_1} + \frac{N_2^0}{E_2 A_2}; \quad k = \frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}; \quad k_0 = \frac{M_1^0}{E_1 I_1} - \frac{M_2^0}{E_2 I_2}; \quad (16)$$

$\eta, \xi$  – соответственно коэффициенты жесткости поперечных связей и связей сдвига, представляющие отношение усилия в связи к соответствующей ему деформации. Можно принять, что поперечными связями является слой балки высотой  $C$  между условными составляющими стержнями;

$a, d$  – расстояния от разделяющей плоскости до нейтральных осей верхнего (усиливаемая балка или плита) и нижнего (слой усиления) составляющих стержней;

$E_1, E_2$  – модули упругости верхнего и нижнего составляющих стержней;

$A_1, A_2, I_1, I_2$  – площади сечений и моменты инерции составляющих стержней;

$M_1^0, M_2^0, N_1^0, N_2^0$  – изгибающие моменты и продольные силы в составляющих стержнях от действия внешней нагрузки. В нашем случае отличным от нуля является только изгибающий момент  $M_1^0$ .

В [2] получено решение системы (14) только для частного случая, когда жесткости верхнего и нижнего составляющих стержней равны между собой, что для расчета нашей балки неприемлемо.

Исключив из системы уравнений (14) усилия  $MS$ , получим дифференциальное уравнение для определения  $T(x)$ :

$$T^{VI} - \xi \cdot g \cdot T^{IV} + \eta \cdot k T^{II} + \xi \eta (i^2 - gk) T = -\xi \eta \cdot ik_0 + \xi \eta \cdot kg_0 + \xi \cdot g_0^{IV}. \quad (17)$$

Ввиду высокого порядка уравнения (17) его аналитическое решение весьма затруднено. Решим его с помощью разложения неизвестных усилий  $T(x)$  в тригонометрический ряд по синусам, как это было сделано выше.

Представление решения уравнения (17) в виде разложения (11) правомерно ввиду того, что граничные условия имеют вид:

$$T(0) = T''(0) = T(L) = T''(L) = 0, \quad (18)$$

а также (для симметричной нагрузки):

$$T'(L/2)=0. \quad (19)$$

Кроме того, из условия равновесия на горизонтальную ось (см.рис.2) имеем:

$$\int_0^l \tau(x)dx = 0, \quad (20)$$

где

$$\tau(x)=T'(x). \quad (21)$$

Шесть граничных условий (18), (19) и (20) тождественно удовлетворяются, если решение принять в виде разложения (11). Следовательно, такое решение вполне правомерно.

Величины  $g_0$  и  $k_0$  в уравнении (17) – это изгибающие моменты в составляющих стержнях с некоторыми коэффициентами [2]:

$$g_0 = -aM_1 / EI_1 - bM_2 / EI_2; \quad k_0 = M_1 / EI_1 - M_2 / EI_2 \quad (22)$$

где  $M_1, M_2$  – соответственно функции изгибающих моментов в верхнем и нижнем составляющих стержнях от внешней нагрузки, действующей непосредственно на них (здесь в нашем случае также  $M_2=0$ ;

$a, b$  – расстояние от центров тяжести соответственно верхнего и нижнего стержней до линии их сопряжения;

$EI_1, EI_2$  – изгибные жесткости соответственно верхнего и нижнего составляющих стержней.

Разложив функции  $M_1$  и  $M_2$  в ряды по синусам, подставив выражение (11) в (17), произведя дифференцирование и сократив на  $\sin(\alpha x)$ , получим выражение для определения неизвестных коэффициентов разложения  $T_n$  искомой функции  $T(x)$ :

$$T_n [-\alpha^6 - \xi \cdot g \alpha^4 - k \eta \alpha^2 + \xi \eta (i^2 - gk)] = B_1 M_{1,n} + B_2 M_{2,n}, \quad (23)$$

где обозначено:

$$B_1 = -(\xi \eta \cdot i + \xi \eta k a) / EI_1; \quad B_2 = (\xi \eta \cdot i - \xi \eta k b) / EI_2; \quad (24)$$

$M_{1,n}, M_{2,n}$  – коэффициенты разложения моментов от внешней нагрузки  $M_1$  и  $M_2$ .

В общем случае, когда на верхний стержень действует нагрузка  $q_1$ , а на нижний  $q_2$  выражения для  $M_1$  и  $M_2$  будут иметь вид:

$$M_1 = -q_1 x^2 / 2; \quad M_2 = q_1 l x / 2 + q_2 l x / 2 - q_2 x^2 / 2. \quad (25)$$

Коэффициенты разложения величин  $M_1$  и  $M_2$  в выражении (25) в ряды Фурье будут иметь вид [1]:

$$M_{1,n} = (q_1/l) \left[ (l^2/\alpha - 2/\alpha^3) (-1)^n + 2/\alpha^3 \right]; \quad (26)$$

$$M_{2,n} = -(q_1 l/\alpha) (-1)^n + (q_2/l) \left[ (l^2/\alpha - 2/\alpha^3) (-1)^n + 2/\alpha^3 \right] - (q_2 l/\alpha) (-1)^n$$

Подставив определенные из (26) коэффициенты  $M_{1,n}$  и  $M_{2,n}$  в выражение (23), определим  $T_n$   $m$  раз, где  $m$  – верхний предел суммирования ряда (11) (который, как показывают расчеты, сходится очень быстро) и получим функцию распределения касательных усилий  $T(x)$  между верхним и нижним составляющими стержнями.

После определения функции  $T(x)$  из первого уравнения системы (14) определим вертикальные усилия  $S(x)$ , учитывая, что  $S(x) = -MS''(x)$ :

$$S = (1/i) (-T^{IV} / \xi + gT'' + g_0''). \quad (27)$$

Учитывая, что  $g_0$  определяется по выражению (22,а), а также выражения (25) для моментов  $M_1$  и  $M_2$ , получим выражение для второй производной  $g_0''$ :

$$g_0'' = aq_1/EI_1 + bq_2/EI_2. \quad (28)$$

Примем решение  $S$  по (27) также в виде ряда Фурье по синусам и, разложив  $g_0''$  по (28) также в ряд, получим выражение для определения коэффициента разложения  $S_n$ :

$$S_n = -T_n (\alpha^4 / \xi / i + g\alpha^2 / i) - (2/l/\alpha / i) (q_1 a / EI_1 + q_2 b / EI_2) [(-1)^n - 1], \quad (29)$$

где  $T_n$  – уже определено выше по (23).

Таким образом, мы получили решение задачи в общем виде, когда определяются как вертикальные  $S(x)$ , так и касательные  $T(x)$  усилия взаимодействия между верхней полкой и боковыми ребрами сборно-монокристаллической балки полого треугольного сечения при действии нагрузки как на верхнюю полку, так и на ребра и, наконец, при любом соотношении жесткостных характеристик верхнего (имитирующего работу полки) и нижнего (имитирующего работу боковых ребер) составляющих стержней. После определения  $T(x)$  и  $S(x)$  дальнейший расчет каждого стержня (верхней полки и V-образного нижнего стержня) ведется как для обычных балок, на которые действуют своя внешняя нагрузка, а также усилия  $T(x)$  и  $S(x)$ , определенные из вышеприведенного решения.

Учет вертикальных усилий взаимодействия весьма важен в практических расчетах. Так, если рассмотреть среднюю балку (см. рис. 3), то усилия взаимодействия  $S$  слева и справа от нее (от действия соседних балок)

будут отрывать полку от ребер. Эти усилия будут рассматриваться как внешние усилия на верхний стержень составного стержня. И в этом случае следует задачу решать с учетом вертикальных усилий и  $S(x)$ . Не учет последнего фактора может представлять опасность, если полка не рассчитана на ее возможный отрыв от ребер, т.е. имеет недостаточное армирование, то это может привести к потере несущей способности балки. Приведенная выше методика, достаточно просто реализовываемая численно для расчета на ЭВМ, позволяет избежать такой недооценки указанных выше факторов.

**Выводы и перспективы исследований.** В статье разработана методика расчета совместной работы полок и наклонных ребер балок полого треугольного сечения с помощью адаптации теории составных стержней к расчету таких балок и предложения численного решения системы уравнений, выведенной А.Р. Ржаницыным. Преимуществом предложенной методики расчета является возможность учета различных свойств бетона омоноличивания и бетона основных частей балки полого треугольного сечения, а также учета различного армирования балок.

В перспективе предполагается распространить методику на расчет с учетом изменения жесткостей составляющих стержней в результате образования в них трещин.

1. Азизов Т. Н. Экономичные конструкции покрытий и перекрытий / Т. Н. Азизов. – Умань : Алми, 2002. – 64 с.
2. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Том 1. – М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1945. – 320 с.
4. Снитко Н.К. Строительная механика. – М., 1980. – 431 с.