

УДК 624.014

РОЗРАХУНОК СТАЛЕВИХ БАЛОК З УРАХУВАННЯМ РОЗВИТКУ ПІДВИЩЕНИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

CALCULATION OF STEEL BEAM WITH ACCOUNT OF DEVELOPMENT OF INCREASED PLASTIC DEFORMATION

Білик А.С. к.т.н., доц. (Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ)

Билык А.С. к.т.н., доц. (Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев)

Bilyk A.S. candidate of technical sciences, docent (Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv)

У статті приведено узагальнені рішення ряду задач з пластичного деформування сталевих елементів. Визначено приведенне значення модуля деформації перерізу при розвитку підвищених пластичних деформацій. Показано взаємозв'язок між підвищеними пластичними деформаціями і радіусом кривини балки.

В статье приведены обобщенные решения ряда задач пластического деформирования стальных элементов. Определено приведенное значение модуля деформации сечения при развитии повышенных пластических деформаций. Показана взаимосвязь между повышенными пластическими деформациями и радиусом кривизны балки.

In the article the generalized solutions of a number of tasks on plastic deformation of steel elements are given. The reduced value of the total deformation module of the cross section due to the development of increased plastic deformations is determined. The relationship between elevated plastic deformations of the cross section and radius of curvilinear beam is shown.

Ключові слова:

Пластичні деформації, сталеві елементи, балка, шарнір пластичності, трилінійна діаграма розтягу, пластичний момент опору.

Пластические деформации, стальные элементы, балка, шарнир пластичности, трилинейная диаграмма растяжения, пластичный момент сопротивления.

Steel element, elevated plastic deformation, increased plastic deformation, plastic deformation, hinge of plasticity, plastic moment of resistance, plastic limit analysis of structural members subjected to bending.

Актуальність роботи. Живучість конструкцій обумовлена здатністю конструкції виконувати основні функції незважаючи на отримані пошкодження. В цьому відношенні визначення максимальної несучої спроможності сталевих елементів з урахуванням розвитку надмірних пластичних деформацій є актуальною науково-технічною проблемою.

Аналіз основних досліджень і публікацій. В статті розглянуто роботу балок з урахуванням розвитку надмірних пластичних деформацій.

В нормативних документах з проектування металевих конструкцій надана можливість проектувати сталеві конструкції з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій [1,2,3]. А при певних умовах визначати несучу спроможність сталевих балок з урахуванням утворення шарніра пластичності [2,3]. Перші теоретичні положення розрахунку складних конструкцій з урахуванням пластичних деформацій були обґрунтовані в роботах [4,5,6]. В подальшому розвиток аналітичних підходів до розрахунку конструкцій з урахуванням пластичних деформацій набув у відомих дослідженнях [7,8,9,10,11]. Але для використання запасів несучої спроможності сталевих конструкцій з урахуванням розвитку пластичних деформацій необхідно було розробити принципи двох граничних станів, тому важливим етапом стали дослідження і формулювання принципів розрахунку сталевих конструкцій з урахуванням обмежених пластичних деформацій. Теоретичні основи такого нормативного підходу закладені у відомих роботах [12,13,14,15]. В подальших дослідженнях розрахунок сталевих конструкцій з урахуванням обмежених пластичних деформацій був розповсюджений на широкому класі металевих конструкцій [16,17,18]. Надалі дослідження проводять у напрямку використання більш складних апроксимацій діаграми розтягу сталі при розрахунках розвитку обмежених пластичних деформацій [19,20,21]. Також важливим напрямком є розрахунок тонкостінних конструкцій з урахуванням впливу розвитку пластичних деформацій [22,23,24], а також в балках з гнучкою стінкою постійного і змінного перерізів [1,2,3,25]. Розрахунок рам з урахуванням розвитку шарнірів пластичності з метою визначення максимального можливого граничного стану набув у роботах [26-30].

Постановка задачі. Визначити закономірності роботи балок при розвитку підвищених пластичних деформацій.

Мета і задача досліджень, методика досліджень. Узагальнити дослідження ряду задач пластичного деформування балок з позицій розвитку надмірних пластичних деформацій. В роботі застосовуються аналітичні теоретичні методи і підходи розвитку пластичних деформацій по висоті перерізу балок.

Результати дослідження.

Основні гіпотези і положення. Висота перерізу балки в п'ять разів більша за довжину балки, вірна гіпотези плоских перерізів. Це дає змогу прийняти, що деформації по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. Це підтверджено експериментальними дослідженнями. У дослідженнях прийнята діаграма Прандтля для залежності між деформаціями і напруженнями при пружних і пластичних деформаціях.

Приймається Декартова система координат з центром, розташованими у центрі ваги площі перерізу. Приймається лінійна аналітична залежність за законом Гука між деформаціями і напруженнями:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1)$$

Кривизна стержня, виходячи з гіпотези плоских перерізів, пов'язана з деформаціями і відстанню від нейтральної осі (y).

$$\frac{dz}{\rho} = \frac{\Delta_z}{y} \rightarrow \frac{y}{\rho} = \frac{\Delta_z}{dz} \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta_z}{dz} \rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (2)$$

Відповідно закон Гука може бути записаний так:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (3)$$

При згині балок умовою рівноваги в перерізі, де виникають зовнішні згинальні моменти M_x , необхідною умовою є рівність (урівноваження) згинального моменту інтегральній сумі всіх моментів внутрішніх напружень по площі перерізу.

$$M_x = \int_A \sigma_x y dA, \quad (4)$$

де dA – площа елементарної площадки; y – прийнята відстань від нейтральної осі OX до елементарної площадки, на яку діє елементарне зусилля, створюючи напруження.

Таким чином, прийнята формула теорії опору матеріалів при об'єднанні формул (3) і (4).

$$M_x = \frac{1}{\rho} \int_A E y^2 dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{\int_A E y^2 dA}. \quad (5)$$

Відомо, що $I_x = \int_A y^2 dA$ – це прийнято момент інерції перерізу, а

пружний момент опору перерізу $W_x = I_x / y$.

Якщо повернутись до напружень (3), то маємо:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{EM_x}{\int_A Ey^2 dA} y \quad (6)$$

При **пружній роботі** сталі при $E = \text{const}$ з (6) впливає відома формула

для обчислення напружень: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \rightarrow \sigma = \frac{M_x}{W_x}$.

При **пластичній роботі сталі** й утворенню шарніра пластичності або при розвитку обмежених пластичних деформаціях на певну висоту перерізу від крайніх фібрових волокон до нейтральної лінії приходять до пластичного моменту опору перерізу при максимальних напруженнях, рівних межі текучості сталі: $\sigma_x = \sigma_R = R_y$. З рівняння (4) маємо для складеного перерізу пластичний момент опору перерізу (W_{xpl}):

$$M_x = \sigma_R W_{xpl}, \quad W_{xpl} = \left[\sum_{n_1}^{n_2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} t_j y dy + \frac{E}{\sigma_R} \sum_0^{n_1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} t_i y^2 \right] \quad (7)$$

Відношення пластичного опору перерізу до пружного опору перерізу позначають через відповідний коефіцієнт (c_x) – коефіцієнт збільшення пружного опору перерізу при урахуванні розвитку обмежених пластичних

деформацій [1]: $c_x = \frac{W_{xpl}}{W_x}$.

Для поточного перерізу, де діє не максимальний згинальний момент, введено позначення поточного пластичного моменту опору перерізу $W_{xplz} = W_{xplj}$. Відповідний коефіцієнт збільшення пружного опору поточного перерізу (j) з координатою (z) при розрахунку з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій позначено через $c_{xz} = c_{xj}$.

Задача 1. Визначити узагальнено кривизну балки при розвитку пластичних деформацій.

При вірності гіпотези плоских перерізів слід записати формулу для балки висотою (h_0) та інтегральному значенні приведенного модуля пластичності перерізу (E_{pl}):

$$\sigma_R = \frac{M_x}{W_{pl}} = E_{pl} \frac{h_0 / 2}{\rho_{pl}} \rightarrow \frac{1}{\rho_{pl}} = \frac{M_x}{(h_0 / 2) E_{pl} W_{pl}} \quad (8)$$

Задача 2. Визначити значення максимальних пластичних деформацій при розвитку обмежених пластичних деформацій в залежності від пружної зони в центрі перерізу. Розглянути балку складеного перерізу. Прийняти, що пластичний момент опору якого визначається за (6). Приймаємо, що пружне ядро займає певну частину перерізу висотою ($y_a = \mathcal{G}_\varepsilon (h_0 / 2)$). Максимальні деформації, які будуть виникати в крайніх фібрових волокнах в перерізі розвитку пластичних деформацій будуть залежати від відношення висоти перерізу і висоти пружного ядра при умові, що в іншій частині перерізу будуть виникати пластичні деформації при напруженнях, рівних границі текучості сталі за діаграмою Прандтля. Так, на границі пружної роботи сталі і пластичної, на висоті $(h_0 / 2) = \mathcal{G}_\varepsilon y_a$ відносні деформації будуть дорівнювати максимальним деформаціям пружної роботи сталі $\varepsilon_a = \varepsilon_y$. З другого боку, деформації крайніх фібрових волокон перерізу ($\varepsilon_{h_0/2} = \varepsilon_{pl}$) будуть значно більшими (9).

$$\varepsilon_{pl} = \mathcal{G}_\varepsilon \varepsilon_y. \quad \varepsilon_{pl} = \frac{(h_0 / 2)}{y_a} \varepsilon_y. \quad (9)$$

Таким чином, якщо задати допустимі максимальні значення ε_{pl} , тоді можна визначити розміри пружної зони ядра перерізу за (10). Або задають розміри пружної зони ядра перерізу і визначають максимальні пластичні деформації за (9).

$$y_a = \frac{(h_0)}{2} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{pl}}. \quad (10)$$

Максимальні пластичні деформації зв'язані з кривизною балки згідно гіпотези плоских перерізів аналогічно (2).

$$\varepsilon_{pl} = \frac{h_0 / 2}{\rho_{pl}} \rightarrow \frac{1}{\rho_{pl}} = \frac{\varepsilon_{pl}}{h_0 / 2} \quad (11)$$

Задача 3. Визначити значення приведенного модуля пластичності перерізу (E_{pl}). У перерізі балки, де діє максимальний згинальний момент, допускається розвиток обмежених пластичних деформацій за умовами задач, де наведено формули: (2, 8, 9, 11). Постановка задачі важлива для розрахунку балкових систем і визначення прогинів балок, в яких допускається розвиток обмежених пластичних деформацій.

$$E_{pl} = \frac{\sigma_R W_{pl}}{\varepsilon_{pl} \int_A y^2 dA} h_0 / 2 \quad (12)$$

Остаточно маємо при коефіцієнтах: $\varepsilon_{pl} = \mathcal{G}_\varepsilon \varepsilon_y$, $c_x = \frac{W_{pl}}{W_x}$.

$$E_{pl} = \frac{\sigma_R}{\varepsilon_{pl}} \frac{W_{pl}}{W_x}, \quad E_{pl} = E \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{pl}} \frac{W_{pl}}{W_x}, \quad E_{pl} = \frac{c_x}{\mathcal{G}_\varepsilon} E \quad (13)$$

Приклад. Якщо $\mathcal{G}_\varepsilon = 3$, а відношення пластичного моменту опору перерізу до пружного моменту опору перерізу $c_x = 1,12$, то приведені значення пластичного модуля деформації слід прийняти

$$E_{pl} = \frac{c_x}{\mathcal{G}_\varepsilon} E = 1,12/3 = 0,373E.$$

Задача 4. Порівняти кривину сталеві балки при пружній роботі сталі ($\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_y}{h_0 / 2}$), і при розвитку обмежених пластичних деформацій при

$$\varepsilon_{pl} = \mathcal{G}_\varepsilon \varepsilon_y.$$

Кривина балки в місті розвитку обмежених пластичних деформацій буде:

$$\frac{1}{\rho_{pl}} = \frac{\varepsilon_{pl}}{h_0/2} = \frac{\mathcal{G}_\varepsilon \varepsilon_y}{h_0/2} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_y}{h_0/2} \rightarrow \frac{1}{\rho_{pl}} = \frac{\mathcal{G}_\varepsilon}{\rho} \quad (14)$$

Таким чином, кривина балки в місті утворення розвитку обмежених пластичних деформацій в \mathcal{G}_ε раз більше ніж при пружній роботі сталі.

Висновки. Виконані дослідження проказують можливість розрахунку прогинів балок з урахуванням розвитку надмірних пластичних деформацій, як блок зі змінним модулем деформацій по довжині балки.

1. ДБН В.2.6-198:2014 «Сталеві конструкції. Норми проектування», Мінрегіонбуд, 2014, К.: Видавництво «Сталь», 2014, 199 с. **2.** ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2012 "Єврокод 3. Проектування сталевих конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд (EN 1993-1-1:2005, IDT)". **3.** Нілов О.О. Металеві конструкції. Загальний курс / О.О. Нілов, В.О. Пермяков, О.В. Шимановський, С.І. Білик, Л.І. Лавриненко, І.Д. Белов, В.О. Володимирський // підручник – К.: Видавництво «Сталь», 2010. – 869 с. **4.** Жудин Н.Д. Расчет стальных конструкций с учетом пластических деформаций / Н.Д. Жудин // сб. тр. Киевского строительного института. – Киев: ГНТИ Украины, 1935. – Вып. 2. – С. 19-70. **5.** Патон Е.О. Стальные мосты. / Е.О. Патон, Б.Н. Горбунов // Харьков; Киев: Гос. науч. изд-во Украины. 1935. **6.** Блей Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М.: Госиздат физ-мат литературы, 1959. – 544 с. **7.** Ильющин А.А. Пластичность / А. А. Ильющин – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с. **8.** Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с. **9.** Биргер И.А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести / И.А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. №2, 1975. С. 51–73. **10.** Timoshenko S.P. and Gere J.M: Theory of Elastic Stability / Timoshenko S.P. and Gere J.M // McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York. 1961. **11.** Себешев В.Г. Определение несущей способности стержней и стержневых систем из упругопластического материала / В.Г. Себешев // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1976. № 9. С. 49–57. **12.** Балдин В.А. Основные положения расчета стальных конструкций по предельным состояниям / В.А. Балдин, Г.Е. Вельский // Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1980. – № 11. – С.3–21. **13.** Стрелецкий Н.Н. Расчет элементов стальных конструкций по критерию предельных пластических деформаций / Стрелецкий Н.Н., Бельский Г.Е., Любаров Б.И., Чернов А.Л. // Промышленное строительство, 1978 – №6 – с. 7–11. **14.** Чувикин Г.М. Об устойчивости за пределом упругости внецентренно-сжатых тонкостенных стержней открытого профиля / Г.М. Чувикин // В кн.: Исследования по стальным конструкциям. – М.: Госстройиздат, 1982, – с. 70–159. **15.** Чаплинский И.А. Расчёт конструкций, работающих за пределом упругости / И.А. Чаплинский, В.Г. Себешев, Г.И. Коротеев // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура.,1980. – № 7. – С. 38–46. **16.** Шибанін В.С. Аналітичні залежності розрахунку прогинів стержнів при складному опорі за межею пружності / В.С. Шибанін, І.І. Хилько Металеві конструкції. – 2003, – Т.6.№1 – С.31–33. **17.** Шимановський А.В. Некоторые вопросы устойчивости плоской формы деформирования нитей конечной жесткости за пределами

упругости / А.В Шимановский // Проблемы прочности. – 1992. – № 4. – С. 43-49.

18. Себешев В.Г. Несущая способность упругопластических арок с учётом конечных перемещений / В.Г. Себешев, А.В. Мищенко // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1987. – № 1 – С. 23–28. **19.** Білик С.І. Апроксимація діаграми розтягу сталі степеневою функцією / С.І. Білик, А.С. Білик, М..В. Усенко // Современные строительные конструкции из металла и древесины // Сб. науч. тр. № 15, часть 3 Одеса. МОН України, ОДАБУ, 2011 – С.3–9. **20.** Білик С.І. Пластичний момент опору перерізу балок з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій при використанні трилінійної апроксимації діаграми розтягу сталі / С.І. Білик //36. наук. пр. Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. Вип.14 – К.: Вид-во «Сталь», 2014. – С. 37-40. **21.** Рудых О.Л. Практические вопросы аппроксимации экспериментальных кривых степенными и мелко-линейными функциями / О.Л. Рудых // Вестник ТГАСУ. Хабаровск, 2010, №1 – с. 110–122. **22.** Білик С.І. Про стійкість центрально-стиснутого гнучого швелера з урахуванням розвитку пластичних деформацій / С.І. Білик, М.В. Усенко // 36. наук. пр. Вип. 21. – Рівне. МОН України, НУВГП, 2011. – С. 136–143. **23.** Білик С.І. Стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей / С.І. Білик, А.С. Білик, М..В. Усенко, О.Є. Золотопольський // 36. наук. пр. Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. Вип. 7. – К. : Вид-во «Сталь», 2010. – С. 26–35. **24.** Білик С.І. Рациональні рамні каркаси постійного та змінного двотаврового перерізу з підвищеною гнучкістю стінки / С.І. Білик, І.О. Склярів // 36. наук. пр. Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. Вип. 7. – К. : Вид-во «Сталь», 2010. – С. 19–209. **25.** Chiorean C.G., Barsan G.M. (2005) Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks. *Comput Struct* 83:1555–1571. **26.** Cocchetti G, Maier G (2003) Elastic-plastic and limit-state analysis of frames with softening plastic-hinge models by mathematical programming. *Int J Solids Struct* 40:7219–7244. **27.** Cuong NH, Kim SE, Oh JR (2006) Nonlinear analysis of space frames using fibre plastic hinge concept. *Eng Struct* 29:649–657 Google Scholar. **28.** Hoang-Van L, Nguyen-Dang H (2008) Local buckling check according to Eurocode-3 for plastic-hinge analysis of 3-D steel frames. *Eng Struct* 30:3105–3513. View Article Google Scholar. **29.** Van-Long Hoang, Hung Nguyen Dang An overview of the plastic-hinge analysis of 3D steel frames// *Asia Pacific Journal on Computational Engineering* 2015 2:4, (38 p.) DOI 10.1186