

## СИСТЕМИ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ ПІД ЧАС РОЗКЛАДАННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПО ПОЛІНОМАХ

Юрій МАКСИМ'ЮК<sup>1</sup>, Олександр КОЗАК<sup>2</sup>, Іван МАРТИНЮК<sup>3</sup>, Владислав БУЧКО<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup> maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua, <http://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

<sup>2</sup> oleksandr.kozak@zetis.biz, <http://orcid.org/0000-0002-0025-6554>

<sup>3</sup> ivan.martinyuk@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

<sup>4</sup> vlad.buchko.1998@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-4668-5469>

**Анотація.** Отримані в [10, 12] формули для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості дозволяють використовувати для представлення переміщень різні системи координатних функцій, побудовані на основі поліномів. Відмінна особливість цих співвідношень у порівнянні з аналогічними, виведеними при використанні для подання переміщень рядів Фур'є, полягає в тому, що не рівні нулю коефіцієнти не тільки діагональних, але і периферійних підматриць і розв'язання систем рівнянь, що одержуються на їх основі, прямими методами стає недоцільним. До чинників, визначальних у разі ефективності напіваналітичного методу скінчених елементів, ставляться, насамперед, простота завдання умов закріплення на торцях тіла, і величина обсягу обчислень, обумовлена швидкістю збіжності інтеграційного процесу розв'язання систем рівнянь. Особливе значення в рамках напіваналітичного варіанту методу скінчених елементів має вибір відповідної системи координатних функцій для представлення переміщень по довжині призматичного елемента. При виведенні співвідношень універсального скінченного елемента за винятком рядів Фур'є безпосереднє використання функцій, що застосовувалися в розглянутих вище роботах з розрахунку призматичних тіл на основі напіваналітичного методу скінчених елементів, представляється нерациональним, тому що кожна з них задовольняє тільки окремих випадків граничних умов, причому сформульованим з позицій теорії оболонок.



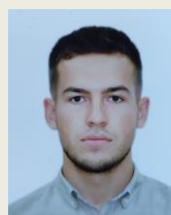
**Юрій МАКСИМ'ЮК**  
професор кафедри  
будівельної механіки,  
д.т.н.



**Олександр КОЗАК**  
доцент кафедри  
залізобетонних та кам'яних  
конструкцій,  
к.т.н.



**Іван МАРТИНЮК**  
докторант кафедри  
будівельної механіки,  
к.т.н.



**Владислав БУЧКО**  
аспірант кафедри  
будівельної механіки

Крім того серед розглянутих функцій тільки ряди Фур'є забезпечують суворий поділ змінних і зведення вихідної просторової задачі до ряду двовимірних для кожної утримуваної гармоніки.

На підставі наведених досліджень зроблений висновок, що змішані системи координатних функцій, побудовані на базі поліномів Міхліна, дозволяють найбільш просто формулювати різні умови закріплення на торцях, забезпечуючи при цьому високу швидкість збіжності ітераційного процесу.

**Ключові слова.** Метод скінчених елементів (МСЕ); напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ); моментна схема скінчених елементів (МССЕ); ряди Фур'є; поліноми Лагранжа, Лежандра, Міхліна.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При виборі форми елемента слід врахувати, що його властивості повинні задовольняти вимогам, що впливають з необхідності розраховувати масивні тіла зі складним обрисом границь поперечного перерізу і відповідно тонкостінні об'єкти, напружений стан яких характеризується наявністю значних згинальних складових. Завдяки простоті співвідношень широкого поширення набули трикутні скінченні елементи, що дозволяють задовільно описувати криволінійні границі, проте, як показано в монографії [6], вони значно поступаються в задачах згину чотирикутним СЕ. Беручи до уваги характер зміни переміщень по товщині оболонок і пластин, оптимальним слід визнати лінійний закон їх поширення в межах елемента. Тому в якості універсального СЕ прийнято призматичний елемент з білінійним законом заповнення переміщень в області чотирикутного поперечного перерізу, вивід матриці жорсткості якого виконаний відповідно до методики (МССЕ) [11, 14].

Як показано в роботах [2, 3, 13, 17], застосування МССЕ значно покращує збіжність результатів у порівнянні з іншими схемами МСЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності. Вона дозволяє розраховувати як масивні, так і тонкостінні тіла, не уступаючи оболонковим варіантам МСЕ. Крім того, застосування МССЕ дозволяє

усунути явище «помилкового зсуву», що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ [7, 19], і задовольнити зсувам елемента як жорсткого цілого, необхідність врахування яких відзначається в значній кількості публікацій [1, 4, 5, 8, 9, 15].

Аналіз публікації [18], присвячених різним методам розрахунку просторових конструкцій, дозволяє зробити висновок, що найбільш перспективною для загального випадку граничних умов є орієнтація на розкладання переміщень за поліномами.

## ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ СИСТЕМИ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ ПІД ЧАС РОЗКЛАДАННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПО ПОЛІНОМАХ

Для обґрунтування вибору поліномів, які найбільш повно задовольняють сформульованим вимогам, розглянемо три системи координатних функцій.

Як перша для представлення переміщень прийняті ортонормовані поліноми Лежандра :

$$P_{(t)} = \sqrt{\frac{2t+1}{2}} \sum_{k=0}^t \frac{(-1)^k (t+k)!}{(t-k)!(k!)^2 2^{k+1}} \cdot \left[ (1-x^3)^k + (-1)^t (1+x^3)^k \right] \quad (1)$$

$$\frac{dP_{(t)}}{dx^3} = \sqrt{\frac{2t+1}{2}} \sum_{k=1}^t \frac{(-1)^{k+1} (t+k)! k}{(t-k)!(k!)^2 2^{k+1}} \cdot \left[ (1-x^3)^{k-1} + (-1)^{t-1} (1+x^3)^{k-1} \right]$$

Така система поліномів є дуже мінімальною в метриці оператора теорії розв'язання задачі варіаційними методами.

Друга система координатних функцій змішана. Її перші два члени належать поліномам Лежандра, решта – Міхліна [16]:

Виразимо переміщення через коефіцієнти їх розкладання за поліномами відповідно до (1):

$$q_{(0)} = C_{(0)} P_{(0)}, \quad q_{(1)} = C_{(1)} P_{(1)} \quad (2)$$

$$q_{(t)} = C_{(t)}P_{(t)} - C_{(t-1)}P_{(t-2)}$$

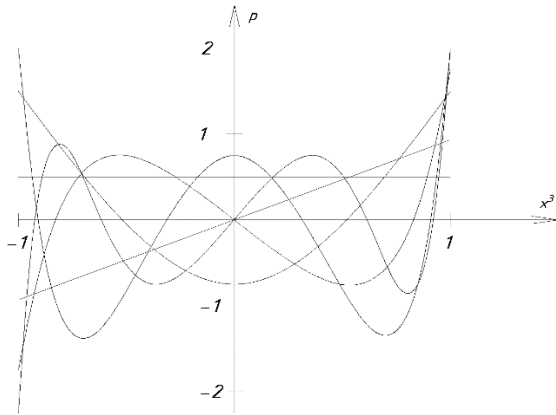


Рис.1. Графіки функцій  $P_{(t)}$

Fig.1. Function graphs  $P_{(t)}$

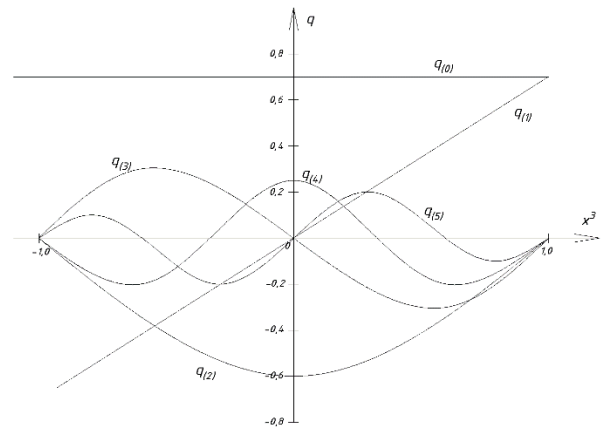


Рис.2. Графіки функцій  $q_{(t)}$

Fig.2. Function graphs  $q_{(t)}$

$$\frac{aq_{(0)}}{ax^3} = 0, \quad \frac{aq_{(1)}}{ax^3} = \sqrt{\frac{3}{2}}c_{(1)},$$

$$\frac{aq_{(t)}}{ax^3} = P_{(t-1)} \quad (3)$$

де

$$c_{(1)} = 1, \quad c_{(t)} = \sqrt{(4t^2 - 1)^{-1}},$$

$$(t = 1, 2, 3 \dots) \quad (4)$$

Перших два члена третьої системи координатних функцій належать поліномам Лагранжа, інші Міхліна:

$$R_0 = \frac{1}{2}(1-x^3), \quad R_1 = \frac{1}{2}(1+x^3),$$

$$R_{(t)} = q_{(t)} \quad (5)$$

$$\frac{dR_{(0)}}{dx^3} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dR_{(1)}}{dx^3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dR_{(t)}}{dx^3} = P_{(t-1)}$$

Графіки функцій  $q_{(t)}$  і  $R_{(t)}$  наведені на рис. 2 та 3 відповідно. Ці координатні системи майже ортонормовані у метриці енергійного простору, що є особливо

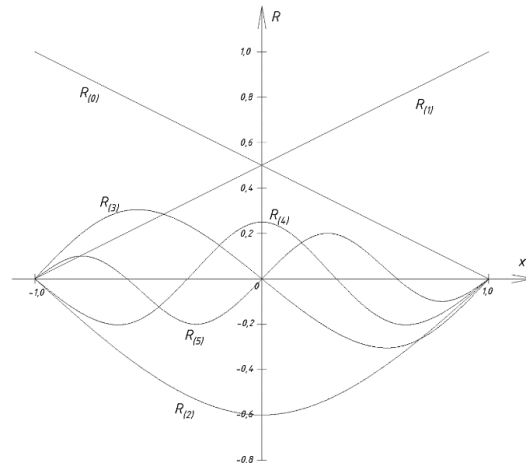
важливим з погляду збіжності ітераційних процесів розв'язання системи рівнянь [16]

Аналіз значень, які приймають розглянуті поліноми при  $x^3 = \pm 1$  (див. рис. 1 та 3) дає підставу зробити висновок, що тільки система базисних функцій  $R$  дозволяє найбільш просто формулювати різні варіанти закріплення торців тіла традиційним для МСЕ способом, що полягає у виключенні відповідних рівнянь.

При апроксимації переміщень поліномами  $p$  завжди і  $q$  в задачах з несиметричними граничними умовами завдання закріплення вимагає залучення спеціальних прийомів, що ґрунтуються на використанні невизначених множників Лагранжа, введенні пружних опор тощо, які суттєво знижують ефективність НМСЕ.

Так, застосування невизначених множників Лагранжа призводить до збільшення кількості невідомих і погіршує обумовленість матриці системи рівнянь.

Пружні опори моделюють граничні умови приблизно і також погіршують обумовленість матриці, що наочно ілюструється на прикладі розрахунку в умовах плоскої деформації за напрямом  $x^2$

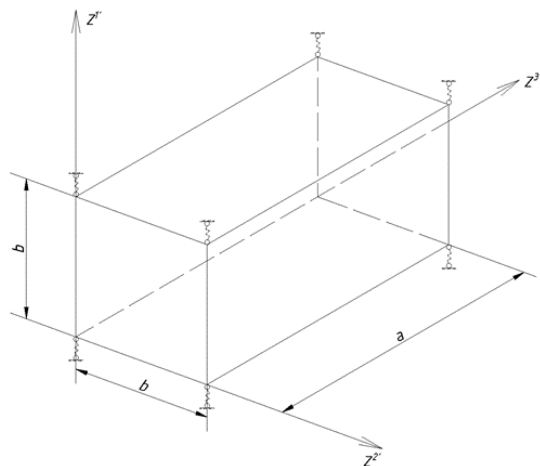


**Рис.3.** Графіки функцій  $R_l$

**Fig.3.** Function graphs  $R_l$

бруса довжиною  $a = 0,02\text{ м}$  з товщиною  $b = 0,01\text{ м}$  (рис. 4). Брус навантажений по порожнинам  $x^1 = \pm 0,5$  нормальним рівномірно розподіленим навантаженням  $Q$  і закріплений від зсувів по площинах  $x^3 = \pm 1$ . У таблиці 1 наведено значення числа обумовленості  $\alpha = \tilde{\lambda}_{\max} / \tilde{\lambda}_{\min}$  і зміщення  $v_1 = u_1 E / Q$ , обчислення при різних способах завдання закріплення. Тут:  $\tilde{\lambda}_{\max}$  і  $\tilde{\lambda}_{\min}$  - максимальне та мінімальне власні числа матриці відповідно;  $u_1$  - прогин у точці  $x^2 = 0,5$ ,  $x^3 = 0$ .  $E$ - модуль пружності матеріалу.

Об'єкт апроксимувався одним кінцевим елементом з утриманням поліномом  $q$  і  $R$ ,



знадобилося всього 7 простих ітерацій для досягнення точності обчислення близько 1%. При формуванні матриці на основі поліномів  $P$  податливість пружних опор приймалося такою, щоб похибка визначення  $v_1$ , пов'язана з наближеним задоволенням граничних умов не перевищувала 1%. У цьому випадку кількість обумовленості матриці для поліномів  $P$  зростає більш ніж на два порядки, а ітераційний процес розходиться не тільки для простих, але і блокових ітерацій. Проведені дослідження показують, що за наявності закріплень на торцях тіла використання поліномів Лежандра є недоцільним.

**Рис.4.** Розрахункова схема балки  
**Fig.4.** Estimated scheme of the beam

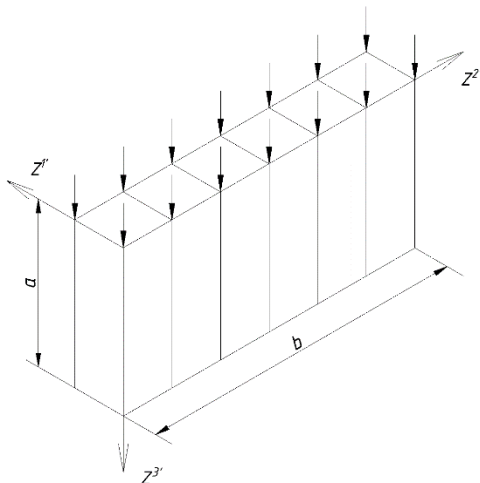
**Табл.1.** Значення числа обумовленості  $\alpha$  і зміщення  $U_1$ , обчислення різними способами фіксації завдань.

**Табл.1.** The value of the number of conditionality  $\alpha$  and  $U_1$  displacement, calculation in different ways of fixing tasks.

$\varphi$	Спосіб завдання закріплень	$\alpha$	$U_1$	
			Градус	Прості ітерації
$R, q$	Виключення невідомих	35,9	1,50	1,48
$p$	Пружні опори	39,58	1,51	-

Зіставлення збіжності ітераційного процесу розв'язання систем рівнянь, побудованих на основі функцій, що розглядаються, для об'єктів з незакріпленими торцями проведено на прикладі нескінченної в напрямку  $Z^1$  смуги прямокутного перерізу, розрахункова схема якої наведена на рис. 5. Моделювання умов плоскої деформації вздовж осі  $Z^1$  здійснюється шляхом виділення шару кінцевої товщини закріпленого від зсувів

$u_1$ . Граничні умови на площинах  $Z^2 = 0$  і  $Z^2 = b$  відповідають спираю на гнучку діафрагму, площині  $Z^3 = 0$  і  $Z^3 = a$  та вільні від закріплення. Смуга перебуває під впливом рівномірно розподіленої площині  $Z^3 = 0$  навантаження одиничної інтенсивності. У напрямку  $Z^1$  смуга апроксимувалась одним елементом, по осі  $Z^2$  - вісьмома при утриманні шести членів розкладання по поліномах.

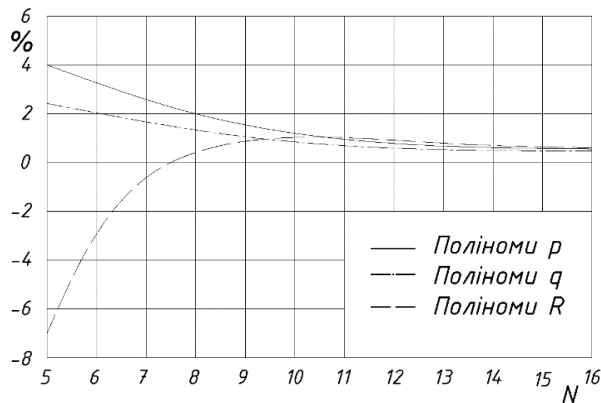


**Рис.5.** Схема розрахунку нескінченності в напрямку смуги  $Z^1$  прямокутного перерізу  
**Fig.5.** The calculation scheme of the infinite in the direction  $Z^1$  of the strip of rectangular cross section

**Табл.2.** Дані про кількість ітерацій, необхідних для вирішення задачі з однаковою точністю  
**Tabl.2.** Data on the number of iterations needed to solve the problem with equal accuracy

$\omega, \varphi$	$p$	$q$	$R$
1	14	14	32
1,2	8	9	21
1,4	8	8	11
1,6	13	15	17

На першому етапі виконано дослідження впливу параметра релаксації  $\omega$  на збіжність методу блокових ітерацій. В таблиці 2 наведено дані про кількість ітерацій, необхідних для розв'язання задачі з однаковою точністю, на підставі порівняння яких оптимальне значення  $\omega$



## ВИСНОВКИ

Таким чином, на підставі проведених досліджень можна зробити висновок, що змішані системи координатних функцій, побудовані на базі поліномів Міхліна, дозволяють найбільш просто формулювати різні умови закріплення на торцях, забезпечуючи при цьому високу швидкість збіжності ітераційного процесу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Баженов В.А.** Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / [Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.] – Київ: Вид-во «Каравела», 2018. – 316с.
2. **Баженов В.А.** Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр [та ін.] // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2014. – Вип. 92. – С. 3–16.
3. **Баженов В. А.** Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : «Каравела», 2014. – 236 с.
4. **Богнер (F.K.Bogner), Фокс (R.L. Fox), Шмит (L.A. Schmit).** Расчет цилиндрической

приймаю 1.4 для цих поліномів. Потім при оптимальному значенні параметра релаксації проведено оцінку точності розв'язання в залежності від кількості ітерацій. Подані на рис. 6 графіки показують, що максимальна точність результатів досягається під час використання поліномів  $q$ .

**Рис.6.** Графік залежності точності розв'язання від кількості ітерацій  
**Fig.6.** Graph of the accuracy of the solution on the number of iterations

- оболочки методом дискретных элементов. – *Ракетная техника и космонавтика*, 1967, № 4, с.170-175.
5. **Гуляр О.І.** Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2012. – Вип. 89. – С. 143–157.
  6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 539 с.
  7. **Зенкевич О.К., Айронс Б.М., Скотт Ф.К., Кемпбелл Дж.С.** Анализ трехмерного напряженного состояния. – В кн.: *Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Л.: Судостроение*, 1974, с.293-305.
  8. **Кэнтин ( G.Cantin ).** Зависимость деформаций цилиндрических оболочек от перемещений. – *Ракетная техника и космонавтика*, 1986, № 9, с.219-220.
  9. **Кэнтин ( G.Cantin ).** Смещения криволинейных конечных элементов как жесткого целого. – *Ракетная техника и космонавтика*, 1970, № 7, с.150-159.
  10. **Максим'юк Ю.** Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами / Ю. Максим'юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // *Зб. наук. праць Будівельної конструкції теорія і практика.* – 2021. – Вип. 9. – С. 54–62.

11. **Максим'юк Ю.В.** Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд* – 2014. – Вип. 92. – С. 148–156.
12. **Максим'юк Ю.В.** Виведення формул для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента на основі представлення переміщень поліномами / Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк, В.В. Бучко, О.В. Максим'юк // *Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн.* – К.: КНУБА, 2022 – Вип.47 – С. 51-59.
13. **Максим'юк Ю.В.** Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонко-стігних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд* – 2016. – Вип. 97. – С. 186–193.
14. **Максим'юк Ю.В.** Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд* – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.
15. **Мейбейн (P.M. Mebane), Стриклин (I.A. Stricklin).** Неявное представление жесткого смещения в случае криволинейных конечных элементов. – *Ракетная техника и космонавтика*, 1971, № 2, с.136-139.
16. **Михлин С.Г.** Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
17. **Пискунов С.О.** Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк, А.Д. Солоденко // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2013. – Вип. 91. – С. 59–75.
18. **Прокопов В.К.** Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям. – *Тр. ЛПИ*, 1967, т.279, с.31-49.
19. **Ahmads., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.** Analysis of thick and thin shells structures by curved finite elements. – *Int. T. Num. Meth. in Eng.*, v.2, 1970, N 3, p.419-451.
20. **Bazhenov V.A.** Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry neliniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn / V.A. Bazhenov, O.S. Sakharov, O.I. Huliar [ta in.] // *Opir materialiv i teoriia sporud.* – 2014. – Vyp. 92. – S. 3–16.
21. **Bazhenov V.A.** Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh kontynualnoho ruinovannia prostorovykh til: Monohrafiia / V.A. Bazhenov, O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov – K. : «Karavela», 2014. – 236 s.
22. **Bohner (F.K.Bogner), Foks (R.L. Fox), Shmyt (L.A. Schmit).** Raschet tsylyndryche-skoï obolochky metodom dyskretnykh elementov. – *Raketnaia tekhnika y kosmonavtyka*, 1967, № 4, s.170-175.
23. **Huliar O.I.** Efektyvnist momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) v zadachakh zghynu ta z kontsentratoramy napruzhen / O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, I.I. Solodei, Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud.* – 2012. – Vyp. 89. – S. 143–157.
24. **Zenkevych O.** Metod konechnykh elementov v tekhnike. – М.: Myr, 1975. –539 s.
25. **Zenkevych O.K., Airons B.M., Skott F.K., Kempbell Dzh.S.** Analiz trekhmernoho napriazhennoho sostoiannya. – V kn.: *Raschet upru-hykh konstruksyi s yspolzovanyem ЭВМ.* L.: Sudostroenye, 1974, s.293-305.
26. **Кэнтэн ( G.Cantin ).** Zavysymost deformatsyi tsylyndrycheskykh obolochek ot peremeshchennyi. – *Raketnaia tekhnika y kosmonavtyka*, 1986, № 9, s.219-220.
27. **Кэнтэн ( G.Cantin ).** Smeshchennia kryvolyneinykh konechnykh elementov kak zhestkoho tseloho. – *Raketnaia tekhnika y kosmonavtyka*, 1970, № 7, s.150-159.
28. **Maksymiuk Yu.** Vuzlovi reaksii ta koefitsiienty matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa na osnovi predstavleniia peremishchen polinomamy / Yu. Maksymiuk, O. Shkryl, I. Martyniuk, V. Buchko // *Zb. nauk. prats Budivelni konstruksii teoriia i praktyka.* – 2021. – Vyp. 9. – S. 54–62.
29. **Maksymiuk Yu.V.** Alhorytm rozv'iazku zadach neliniinoho deformuvannia ta stiikosti pruzhnoplastychnykh visesymetrychnykh obolonok serednoi tovschchyny / Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2014. – Vyp. 92. – S. 148–156.
30. **Maksymiuk Yu.V.** Vyvedennia formul dlia obchyslennia vuzlovykh reaksii ta koefitsiientiv

## REFERENCES

1. **Bazhenov V.A.** Metod skinchenykh elementiv u zadachakh deformuvannia ta ruinovannia til obertannia pry termosylovomu navantazhenni / [Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Maksymiuk Yu.V.] – Kyiv: Vyd-vo "Karavela", 2018. – 316s.

matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa na osnovi predstavlennia peremishchen polinomy / Yu.V. Maksymiuk, I.Iu. Martyniuk, V.V. Buchko, O.V. Maksymiuk // *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system: Nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2022 – Vyp.47 – S. 51-59.

13. **Maksymiuk Yu.V.** Postanovka zadachi pro vplyv heometrychnoi nelineinosti na nesuchu zdatnist i zakrytychnu povedinku tonkostinykh ta kombinovanykh visesymetrychnykh til / Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2016. – Vyp. 97. – S. 186–193.
14. **Maksymiuk Yu.V.** Rozrakhunkovi spivvidnoshenia universalnogo skinchenoho elementa na osnovi momentnoi skhemy skinchenykh elementiv / Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2015. – Vyp. 94. – S. 244–251.
15. **Mebein (P.M. Mebane), Stryklyn (I.A. Stricklin).** Neiaвноe predstavlenye zhestkoho smeshcheniya v sluchae kryvolyneinykh konechnykh elementov. – *Raketnaia tekhnika y kos-monavytka*, 1971, № 2, s.136-139.
16. **Mykhlyn S.H.** Chyslennaia realizatsiia varyatsionnykh metodov. – M.: Nauka, 1966. – 432 s.
17. **Pyskunov S.O.** Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry liniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn / S.O. Pyskunov, I.I. Solodei, Yu.V. Maksymiuk, A.D. Solodenko // *Opir materialiv i teoriia sporud.* – 2013. – Vyp. 91. – S. 59–75.
18. **Prokopov V.K.** Obzor rabot po odnorodnym resheniyam teoryu uprugosti y ykh prylozheniyam. – *Tr. LPY*, 1967, t.279, s.31-49.
19. **Ahmads., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.** Analysis of thick and thin shells structures by curved finite elements. – *Int. T. Num. Meth. in Eng.*, v.2, 1970, N 3, p.419-451.

## SYSTEMS OF COORDINATE FUNCTIONS DURING THE DECOMPOSITION OF DISPLACEMENTS BY POLYNOMIALS

*Yurii MAKSYMIUK, Oleksandr KOZAK,*

*Стаття надійшла до редакції 10.05.2022*

*Ivan MARTYNIUK, Vladyslav BUCHKO*

**Summary.** The formulas obtained in [10, 12] for the calculation of nodal reactions and stiffness matrix coefficients allow to use different systems of coordinate functions constructed on the basis of polynomials to represent displacements. A distinctive feature of these relations in comparison with similar ones derived when using Fourier series to represent the displacements is that the coefficients of not only diagonal, but also peripheral submatrices do not equal zero and the solution of systems of equations obtained on their basis by direct methods becomes impractical. The factors that determine the efficiency of the semi-analytical finite element method include, first of all, the task of fixing the conditions at the ends of the body and the amount of calculations due to the rate of convergence of the integration process of solving systems of equations.

Of particular importance in the semi-analytical variant of the finite element method is the choice of the appropriate system of coordinate functions to represent the displacements along the length of the prismatic element. In deriving the relations of a universal finite element with the exception of Fourier series, the direct use of functions used in the above works to calculate prismatic bodies based on the semianalytic finite element method seems irrational, because each of them satisfies only individual cases of boundary conditions. From the standpoint of the theory of shells. In addition, among the functions considered, only Fourier series provide a strict separation of variables and reduce the original spatial problem to a series of two-dimensional for each contained harmonic.

Based on the above research, it is concluded that mixed coordinate function systems based on Michlin polynomials allow the simplest formulation of different conditions of fixation at the ends, while ensuring a high rate of convergence of the iterative process.

**Keywords.** Finite element method (FEM), semi-analytic finite element method (SFEM); momentary scheme of finite elements (MSFEM); fourier series Lagrange, Legendre, and Michlin polynomials.